

第六次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 3 月 28 日

截止日期 2025 年 4 月 7 日晚 24 点

1. 请不计算下列矩阵的乘法，直接给出 A 中列空间和行空间的一组基：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 判断下列语句的真假：

- 令 A 是 $m \times n$ 的矩阵，则不在列空间 $C(A)$ 的向量 $b \in \mathbb{R}^m$ 组成的集合也是一个向量空间。
- 如果 $C(A) = \{\mathbf{0}\}$ ，则 A 是全零矩阵。
- $2A$ 的列空间和 A 的列空间相同。
- A 的列空间和 $A - E$ 的列空间相同。

3. 证明矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & AB \end{bmatrix}$ 的列空间与矩阵 A 的列空间相等, 这里 A 是 $m \times n$ 的矩阵, B 是 $n \times k$ 的矩阵, 所以 C 是一个 $m \times (n + k)$ 的矩阵。

4. 用矩阵的形式给出矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ 消元成上三角矩阵的过程, 并给出 A 的 LU 分解。

5. 这道题我们再来考虑一下向量空间下的一组基。

- (1) 考察一个 n 维向量空间 V , 其上的两组基分别为 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 和 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 。证明, 存在唯一的 n^2 个不全为 0 的实数 $c_{11}, \dots, c_{nn}$ 满足:

$$f_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \cdots + c_{n1}e_n$$

$$f_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \cdots + c_{n2}e_n$$

...

$$f_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \cdots + c_{nn}e_n$$

(2) 继续上一问的条件，我们将这些 c_{ij} 看作一个矩阵 C ，即：

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

特别的，我们可以如下表示上述基的关系：

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

从而矩阵 C 被称作基 $e_1, \dots, e_n$ 到 $f_1, \dots, f_n$ 的**过渡矩阵**，这里我们可以借助矩阵的乘法来理解上述等式，但是也请注意， f_i, e_i 并不一定是列向量，所以我们不能直接写成矩阵的形式。请证明， C 是一个**可逆矩阵**。

(3) 现在考察 $\mathbb{R}^3$ 中的两组基：

$$\bullet E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ 和 } E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

请写出 E_1 到 E_2 的过渡矩阵。

注 0.1

这一道题其实想展示的是，在同一个线性空间中，不同基之间的转换是可以通过一个可逆矩阵来表示的。