线性代数 Week 6

第六次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 3 月 28 日

截止日期 2025 年 4 月 7 日晚 24 点

1. 请不计算下列矩阵的乘法，直接给出 A 中列空间和行空间的一组基：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 判断下列语句的真假：

- 令 A 是 $m \times n$ 的矩阵，则不在列空间 $\boldsymbol{C}(A)$ 的向量 $b \in \mathbb{R}^m$ 组成的集合也是一个向量空间。
- 如果 $C(A) = \{\mathbf{0}\}$，则 A 是全零矩阵。
- $2A$ 的列空间和 A 的列空间相同。
- A 的列空间和 $A - E$ 的列空间相同。

3. 证明矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & AB \end{bmatrix}$ 的列空间与矩阵 A 的列空间相等，这里 A 是 $m \times n$ 的矩阵，B 是 $n \times k$ 的矩阵，所以 C 是一个 $m \times (n+k)$ 的矩阵。

4. 用矩阵的形式给出矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ 消元成上三角矩阵的过程，并给出 A 的 LU 分解。

5. 这道题我们再来考虑一下向量空间下的一组基。

(1) 考察一个 n 维向量空间 V，其上的两组基分别为 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$。证明，存在唯一的 n^2 个不全为 0 的实数 $c_{11}, \ldots, c_{nn}$ 满足：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= c_{11}\boldsymbol{e}_1 + c_{21}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{f}_2 &= c_{12}\boldsymbol{e}_1 + c_{22}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_{n2}\boldsymbol{e}_n \\ &\cdots \\ \boldsymbol{f}_n &= c_{1n}\boldsymbol{e}_1 + c_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{aligned}$$

(2) 继续上一问的条件，我们将这些 c_{ij} 看作一个矩阵 C，即：

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

特别的，我们可以如下表示上述基的关系：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \cdots & \boldsymbol{f}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

从而矩阵 C 被称作基 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 到 $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ 的**过渡矩阵**，这里我们可以借助矩阵的乘法来理解上述等式，但是也请注意，$\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{e}_i$ 并不一定是列向量，所以我们不能直接写成矩阵的形式。请证明，C 是一个**可逆矩阵**。

(3) 现在考察 $\mathbb{R}^3$ 中的两组基：

- $E_1 = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ 和 $E_2 = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

请写出 E_1 到 E_2 的过渡矩阵。

注 0.1

这一道题其实想展示的是，在同一个线性空间中，不同基之间的转换是可以通过一个可逆矩阵来表示的。