线性代数 Week 7

第七次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 4 月 18 日

截止日期 2025 年 4 月 17 日晚 24 点

1. (1) 计算下列矩阵的逆矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 证明对下列的矩阵 C, 如果 $a \neq 0, a \neq b$，则 C 是可逆矩阵，并求出其逆矩阵 (用 a, b 表示)。

$$C = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

解答.

(1) 对 $\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix}$ 进行消元法得:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

从而其逆矩阵为:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

对 $\begin{bmatrix} B & E \end{bmatrix}$ 进行消元法得:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{6}{5} & -2 \end{bmatrix}$$

从而其逆矩阵为:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 2 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{6}{5} & -2 \end{bmatrix}.$$

(2) 对 A 进行消元法得:

$$\begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & a-b & a-b \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}$$

从而当 $a \neq 0, a \neq b$ 时矩阵 A 有 3 个首元，所以 A 是可逆的。其逆矩阵可以进一步通过消元求得:

$$\begin{bmatrix} a & b & b & 1 & 0 & 0 \\ a & a & b & 0 & 1 & 0 \\ a & a & a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & -1 & 1 & 0 \\ a & a & a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-b & a-b & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & 0 & 1 & \frac{b}{a-b} & -\frac{b}{a-b} \\ 0 & a-b & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \frac{a}{a-b} & 0 & -\frac{b}{a-b} \\ 0 & a-b & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a-b} & 0 & -\frac{b}{a(a-b)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{a-b} & \frac{1}{a-b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{a-b} & \frac{1}{a-b} \end{bmatrix}$$

即:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a-b} & 0 & -\frac{b}{a(a-b)} \\ -\frac{1}{a-b} & \frac{1}{a-b} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a-b} & \frac{1}{a-b} \end{bmatrix}$$

□

2. 考虑如下的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- 将其转换成行最简形 (Reduced Row Echelon Form)，并求其秩。
- 给出其零空间 $\boldsymbol{N}(A)$ 的一组基。

解答. 对 A 进行消元法得:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而其秩为 2。

x_3, x_4 是自由变量，所以其零空间的两个特殊解为:

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以其零空间的一组基为: $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2$，即:

$$\boldsymbol{N}(A) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\square$

3. 对下列矩阵，求出其行最简形:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & O \end{bmatrix}$$

这里 O 是一个 3×3 的全零矩阵。

解答. 先将 A 化成行最简形:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以对于 B 我们有:

$$\begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于 C 我们有:

$$\begin{bmatrix} A & A \\ A & O \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\square$

4. 我们课上已经证明，对矩阵进行行交换不改变其列秩，请证明对于行加法和行乘法也是如此，即令:

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i - k\boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix}, \quad A'' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ k\boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\text{column-rank}(A) = \text{column-rank}(A') = \text{column-rank}(A'')$$

并且请举个例子表明列空间是可以不相同的：$\boldsymbol{C}(A) \neq \boldsymbol{C}(A') \neq \boldsymbol{C}(A'')$.

解答. 我们首先举一个例子说明：$\boldsymbol{C}(A) \neq \boldsymbol{C}(A') \neq \boldsymbol{C}(A'')$，令:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

可以看到 A' 是由 A 经过行加法 (第二行 = 第二行 + 第一行的-1 倍) 得到的，A'' 是由 A 经过行乘法 (第二行 = 第二行的 2 倍) 得到的。我们有:

- $\boldsymbol{C}(A) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
- $\boldsymbol{C}(A') = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$
- $\boldsymbol{C}(A'') = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

从而我们可以看到 $\boldsymbol{C}(A) \neq \boldsymbol{C}(A') \neq \boldsymbol{C}(A'')$。

下面我们证明:

$$column - rank(A) = column - rank(A') = column - rank(A'')$$

与行交换相同的思路，令 A 的列向量为 $A_1, \ldots A_n$, A' 的列向量为 $A'_1, \ldots A'_n$, A'' 的列向量为 $A''_1, \ldots A''_n$。我们证明对任意的 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leqslant n$ 有:

$$A_{i_1}, \ldots, A_{i_t}\text{线性无关} \Longleftrightarrow A'_{i_1}, \ldots, A'_{i_k}\text{线性无关} \Longleftrightarrow A''_{i_1}, \ldots, A''_{i_t}\text{线性无关}$$

- 先证 $A_{i_1},\dots,A_{i_t}$线性无关 $\Longleftrightarrow$ $A'_{i_1},\dots,A'_{i_t}$线性无关. 注意到:

$$\begin{aligned}
A_{i_1},\dots,A_{i_t}\text{线性无关} &\Longleftrightarrow c_1A_{i_1}+\cdots+c_tA_{i_t}=0 \Longleftrightarrow c_1=\cdots=c_t=0\\
&\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_{i_1,1} & \cdots & A_{i_t,1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{i_1,m} & \cdots & A_{i_t,m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\text{只有零解}\\
&\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_{i_1,1} & \cdots & A_{i_t,1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{i_1,i}-kA_{i_1,j} & \cdots & A_{i_t,i}-kA_{i_t,j}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{i_1,m} & \cdots & A_{i_t,m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\text{只有零解}\\
&\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A'_{i_1} & \cdots & A'_{i_t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_t\end{bmatrix}=0\text{只有零解}\\
&\Longleftrightarrow A'_{i_1},\dots,A'_{i_t}\text{线性无关}
\end{aligned}$$

- 再证 $A'_{i_1},\dots,A'_{i_t}$线性无关 $\Longleftrightarrow$ $A''_{i_1},\dots,A''_{i_t}$线性无关，注意到:

$$\begin{aligned}
A_{i_1},\dots,A_{i_t}\text{线性无关} &\Longleftrightarrow c_1A_{i_1}+\cdots+c_tA_{i_t}=0 \Longleftrightarrow c_1=\cdots=c_t=0\\
&\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_{i_1,1} & \cdots & A_{i_t,1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{i_1,m} & \cdots & A_{i_t,m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\text{只有零解}\\
&\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_{i_1,1} & \cdots & A_{i_t,1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ kA_{i_1,i} & \cdots & kA_{i_t,i}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{i_1,m} & \cdots & A_{i_t,m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\text{只有零解}\\
&\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A''_{i_1} & \cdots & A''_{i_t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_t\end{bmatrix}=0\text{只有零解}\\
&\Longleftrightarrow A''_{i_1},\dots,A''_{i_t}\text{线性无关}
\end{aligned}$$

从而我们有:

$A_{i_1},\dots,A_{i_t}$是 $\boldsymbol{C}(A)$ 的一组基 $\Longleftrightarrow$ $A'_{i_1},\dots,A'_{i_k}$是 $\boldsymbol{C}(A')$ 的一组基 $\Longleftrightarrow$ $A''_{i_1},\dots,A''_{i_t}$是 $\boldsymbol{C}(A'')$ 的一组基

即:

$$\text{column-rank}(A)=\text{column-rank}(A')=\text{column-rank}(A'')$$

$\square$

5. 作为一个预热，让我们关注一下当两个 $\mathbb{R}^n$ 的子空间维数之和大于 n 的情况。令 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间。

- 考虑 $n = 3$ 的例子，令 $U = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$, $V = \{(x, y, z) \mid -x + 2y + z = 0\}$。证明 $\dim(U) = \dim(V) = 2$ 并且 $U \cap V$ 蕴含非零的元素。
- 证明当 $\dim(U) + \dim(V) > n$ 的时候，$U \cap V$ 必然蕴含非零的元素。

解答.

- 注意到 $(1, -1, 0), (1, 0, -1) \in U$ 且其线性无关，并且任一 $\boldsymbol{w} = (a, b, c) \in U$ 我们有:

$$\boldsymbol{w} = -b(1, -1, 0) - c(1, 0, -1)$$

  从而 $\dim(U) = 2$.

  注意到 $(2, 1, 0), (1, 0, 1) \in U$ 且其线性无关，并且任一 $\boldsymbol{w} = (a, b, c) \in V$ 我们有:

$$\boldsymbol{w} = b(2, 1, 0) + c(1, 0, 1)$$

  从而 $\dim(V) = 2$.

  最后注意到:

$$(-1, -2, 3) = 2(1, -1, 0) - 3(1, 0, -1) \in U$$
$$(-1, -2, 3) = -2(2, 1, 0) + 3(1, 0, 1) \in V$$

  从而 $(-1, -2, 3) \in U \cap V$，即 $U \cap V$ 蕴含非零的元素。

- 不妨令 $\dim(U) = r_u, \dim(V) = r_v$。则:

  (1) 设 U 的一组基为 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_{r_u}$.

  (2) 设 V 的一组基为 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{r_v}$.

  由题设 $r_u + r_v > n$,从而 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_{r_u}, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{r_v}$ 是线性相关的,即存在不全为 0 的 $c_1, \cdots, c_{r_u}$ 和 $d_1, \cdots, d_{r_v}$ 使得:

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_{r_u}\boldsymbol{u}_{r_u} + d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_{r_v}\boldsymbol{v}_{r_v} = \boldsymbol{0}$$

  令 $\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_{r_u}\boldsymbol{u}_{r_u}$，则 $\boldsymbol{w} \in U$，并且:

$$\boldsymbol{w} = -(d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_{r_v}\boldsymbol{v}_{r_v}) \in V$$

  从而 $\boldsymbol{w} \in U \cap V$，且 $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$，即 $U \cap V$ 蕴含非零的元素。

□