

第七次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 4 月 11 日

截止日期 2025 年 4 月 17 日晚 24 点

1. (1) 计算下列矩阵的逆矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 证明对下列的矩阵 C , 如果 $a \neq 0, a \neq b$, 则 C 是可逆矩阵, 并求出其逆矩阵 (用 a, b 表示)。

$$C = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

2. 考虑如下的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- 将其转换成行最简形 (Reduced Row Echelon Form), 并求其秩。
- 给出其零空间 $N(A)$ 的一组基。

3. 对下列矩阵，求出其行最简形：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & O \end{bmatrix}$$

这里 O 是一个 3×3 的全零矩阵。

4. 我们课上已经证明，对矩阵进行行交换不改变其列秩，请证明对于行加法和行乘法也是如此，即令：

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i - k\mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}, \quad A'' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ k\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$$

我们有：

$$\text{column-rank}(A) = \text{column-rank}(A') = \text{column-rank}(A'')$$

并且请举个例子表明列空间是可以不相同的： $C(A) \neq C(A') \neq C(A'')$ 。

5. 作为一个预热，让我们关注一下当两个 $\mathbb{R}^n$ 的子空间维数之和大于 n 的情况。令 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间。

- 考虑 $n = 3$ 的例子，令 $U = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$, $V = \{(x, y, z) \mid -x + 2y + z = 0\}$ 。证明 $\dim(U) = \dim(V) = 2$ 并且 $U \cap V$ 蕴含非零的元素。
- 证明当 $\dim(U) + \dim(V) > n$ 的时候， $U \cap V$ 必然蕴含非零的元素。