线性代数 Week 7

第七次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 4 月 11 日

截止日期 2025 年 4 月 17 日晚 24 点

1. (1) 计算下列矩阵的逆矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&-2&0&1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{bmatrix}$$

   (2) 证明对下列的矩阵 C, 如果 $a\neq 0, a\neq b$, 则 C 是可逆矩阵, 并求出其逆矩阵 (用 a,b 表示)。

$$C=\begin{bmatrix}a&b&b\\a&a&b\\a&a&a\end{bmatrix}$$

2. 考虑如下的矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}2&4&6&4\\2&5&7&6\\2&3&5&2\end{bmatrix}$$

   - 将其转换成行最简形 (Reduced Row Echelon Form), 并求其秩。
   - 给出其零空间 $\boldsymbol{N}(A)$ 的一组基。

3. 对下列矩阵, 求出其行最简形:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&3\\2&4&6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}A&A\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}A&A\\A&O\end{bmatrix}$$

   这里 O 是一个 3×3 的全零矩阵。

4. 我们课上已经证明, 对矩阵进行行交换不改变其列秩, 请证明对于行加法和行乘法也是如此, 即令:

$$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\\vdots\\\boldsymbol{a}_i\\\vdots\\\boldsymbol{a}_m\end{bmatrix},\quad A'=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\\vdots\\\boldsymbol{a}_i-k\boldsymbol{a}_j\\\vdots\\\boldsymbol{a}_m\end{bmatrix},\quad A''=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\\vdots\\k\boldsymbol{a}_i\\\vdots\\\boldsymbol{a}_m\end{bmatrix}$$

我们有：

$$\text{column-rank}(A) = \text{column-rank}(A') = \text{column-rank}(A'')$$

并且请举个例子表明列空间是可以不相同的：$\boldsymbol{C}(A) \neq \boldsymbol{C}(A') \neq \boldsymbol{C}(A'')$.

5. 作为一个预热，让我们关注一下当两个 $\mathbb{R}^n$ 的子空间维数之和大于 n 的情况。令 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间。

- 考虑 $n = 3$ 的例子，令 $U = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$，$V = \{(x, y, z) \mid -x + 2y + z = 0\}$。证明 $\dim(U) = \dim(V) = 2$ 并且 $U \cap V$ 蕴含非零的元素。
- 证明当 $\dim(U) + \dim(V) > n$ 的时候，$U \cap V$ 必然蕴含非零的元素。