线性代数 Week 8

第八次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 4 月 26 日

1. 给出 b_1, b_2, b_3, b_4 所需满足的条件，使得下述方程组有解：

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$

解答.

- 我们对其增广矩阵进行消元：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & b_2 \\ 2 & 5 & b_3 \\ 3 & 9 & b_4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 3 & b_4 - 3b_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 3 & b_4 - 3b_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & b_4 - 3b_3 + 3b_1 \end{bmatrix}$$

从而 b_1, b_2, b_3, b_4 需要满足的条件为：

$$\begin{cases} b_2 - 2b_1 = 0 \\ b_4 - 3b_3 + 3b_1 = 0 \end{cases}$$

- 我们对其增广矩阵进行消元：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & b_2 \\ 2 & 5 & 7 & b_3 \\ 3 & 9 & 12 & b_4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 3 & 3 & b_4 - 3b_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 3 & 3 & b_4 - 3b_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 - 3b_3 + 3b_1 \end{bmatrix}$$

从而 b_1, b_2, b_3, b_4 需要满足的条件为：

$$\begin{cases} b_2 - 2b_1 = 0 \\ b_4 - 3b_3 + 3b_1 = 0 \end{cases}$$

□

2. 请描述下属方程组的解:

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\1&3&2&0\\2&0&4&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\10\end{bmatrix}=\boldsymbol{b}$$

解答. 先对 $\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$ 进行消元:

$$\begin{bmatrix}1&0&2&3&2\\1&3&2&0&5\\2&0&4&9&10\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&3&2\\0&3&0&-3&3\\0&0&0&3&6\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&3&2\\0&1&0&-1&1\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&0&-4\\0&1&0&0&3\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

可以得到其一组解为:

$$x_1=-4,x_2=3,x_3=0,x_4=2$$

同时 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解相同，从而可以得到 A 的零空间的一组基为:

$$\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

从而 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解可以表示为:

$$\begin{bmatrix}-4\\3\\0\\2\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

□

3. 证明 A^TA 和 A 的零空间相同，即 $\boldsymbol{N}(A^TA)=\boldsymbol{N}(A)$。

解答. 由:

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Longrightarrow A^TA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

从而 $\boldsymbol{N}(A)\subseteq\boldsymbol{N}(A^TA)$。下证 $\boldsymbol{N}(A^TA)\subseteq\boldsymbol{N}(A)$。设 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{N}(A^TA)$，则有:

$$A^TA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Longrightarrow\boldsymbol{x}^TA^TA\boldsymbol{x}=0\Longrightarrow(A\boldsymbol{x})^T(A\boldsymbol{x})=0\Longrightarrow A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

即: $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{N}(A)$，也就是 $\boldsymbol{N}(A^TA)\subseteq\boldsymbol{N}(A)$。 □

4. 考察 $\mathbb{R}^3$ 的子空间 S:

- 如果 $S=Z=\{\boldsymbol{0}\}$，求 S 的正交补 $S^\perp$。
- 如果 $S=\text{span}(\{(1,1,1)\})$，求 S 的正交补 $S^\perp$。
- 如果 $S=\text{span}(\{(1,1,1),(1,1,-1)\})$，求 S 的正交补 $S^\perp$。

注 0.1

我们再次强调这里是用了 (a, b, c) 来描述了 $\mathbb{R}^3$ 中的列向量 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$，并不是用 $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$。

解答.

- 注意到对于任意向量 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{0} = 0$，从而 $S^{\perp} = \mathbb{R}^3$。
- 实际上就是要求 $\boldsymbol{v}$ 满足:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = 0$$

  从而

$$S^{\perp} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

- 实际上就是要求 $\boldsymbol{v}$ 满足:

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = 0 \end{matrix}, \quad \text{即} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  从而

$$S^{\perp} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

□

5. 我们来证明正交补分解的唯一性。令 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, $V^{\perp}$ 是 V 的正交补。证明对于任一 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$, 如果存在 $\boldsymbol{v} \in V$ 和 $\boldsymbol{v}^{\perp} \in V^{\perp}$ 使得 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}^{\perp}$，则 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}^{\perp}$ 是唯一的。

解答. 假设存在 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ 和 $\boldsymbol{v}_1^{\perp}, \boldsymbol{v}_2^{\perp} \in V^{\perp}$ 使得 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1^{\perp} = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_2^{\perp}$，则有

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2^{\perp} - \boldsymbol{v}_1^{\perp}$$

由于 $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \in V$, $\boldsymbol{v}_2^{\perp} - \boldsymbol{v}_1^{\perp} \in V^{\perp}$, 则有 $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \in V \cap V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, 从而 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$。同理 $\boldsymbol{v}_1^{\perp} = \boldsymbol{v}_2^{\perp}$。 □