

第八次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 4 月 18 日

截止日期 2025 年 4 月 24 日晚 24 点

1. 给出 b_1, b_2, b_3, b_4 所需满足的条件, 使得下述方程组有解:

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$
$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

2. 请描述下类方程组的解:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

3. 证明 $A^T A$ 和 A 的零空间相同, 即 $N(A^T A) = N(A)$ 。

4. 考察 $\mathbb{R}^3$ 的子空间 S :

- 如果 $S = Z = \{\mathbf{0}\}$, 求 S 的正交补 $S^\perp$ 。
- 如果 $S = \text{span}(\{(1, 1, 1)\})$, 求 S 的正交补 $S^\perp$ 。
- 如果 $S = \text{span}(\{(1, 1, 1), (1, 1, -1)\})$, 求 S 的正交补 $S^\perp$ 。

注 0.1

我们再次强调这里是用 (a, b, c) 来描述了 $\mathbb{R}^3$ 中的列向量 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, 并不是用 $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ 。

5. 我们来证明正交补分解的唯一性。令 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, $V^\perp$ 是 V 的正交补。证明对于任一 $w \in \mathbb{R}^n$, 如果存在 $v \in V$ 和 $v^\perp \in V^\perp$ 使得 $w = v + v^\perp$, 则 v 和 $v^\perp$ 是唯一的。