线性代数 Week 8

第八次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 4 月 18 日

截止日期 2025 年 4 月 24 日晚 24 点

1. 给出 b_1, b_2, b_3, b_4 所需满足的条件，使得下述方程组有解：

   - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$

2. 请描述下属方程组的解：

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

3. 证明 A^TA 和 A 的零空间相同，即 $\boldsymbol{N}(A^TA) = \boldsymbol{N}(A)$。

4. 考察 $\mathbb{R}^3$ 的子空间 S:

   - 如果 $S = Z = \{\mathbf{0}\}$，求 S 的正交补 $S^\perp$。
   - 如果 $S = \text{span}(\{(1,1,1)\})$，求 S 的正交补 $S^\perp$。
   - 如果 $S = \text{span}(\{(1,1,1),(1,1,-1)\})$，求 S 的正交补 $S^\perp$。

   注 0.1

   我们再次强调这里是用了 (a,b,c) 来描述了 $\mathbb{R}^3$ 中的列向量 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$，并不是用 $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$。

5. 我们来证明正交补分解的唯一性。令 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, $V^\perp$ 是 V 的正交补。证明对于任一 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$, 如果存在 $\boldsymbol{v} \in V$ 和 $\boldsymbol{v}^\perp \in V^\perp$ 使得 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}^\perp$，则 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}^\perp$ 是唯一的。