线性代数 Week 9

第九次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 5 月 9 日

1. 对于下面给定的 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$，求出 $\boldsymbol{b}$ 到 V 的投影，并计算其误差和相应的投影矩阵，最后验证其误差和 $\boldsymbol{a}$ 是垂直的。

- $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$，$\mathrm{V}=\text{span}(\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\})$。
- $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$，$\mathrm{V}=\text{span}(\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\})$。

解答.

- V 的维度是 1, 所以可以看作到线 $(1,1,1)$ 上的投影, 令 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$, 分别计算 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 可得:

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=3,\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=5$$

从而我们有:

(1) 投影 $\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\end{bmatrix}$

(2) 投影矩阵 $\mathrm{P}=\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

(3) 误差 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ 其和 $\boldsymbol{a}$ 的内积为 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$，从而 $\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{a}$。

- 令 $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}$，则我们有 $\mathrm{V}=\boldsymbol{C}(\mathrm{A})$。计算 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 可得:

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}3&2\\2&2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$$

解方程 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 可得 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$，从而:

(1) 投影 $\boldsymbol{p}=\mathrm{A}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$(这是因为 $\boldsymbol{b}\in\mathrm{V}$).

(2) 投影矩阵 $\mathrm{P}=\mathrm{A}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&1\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(3) 误差 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$

□

2. 考察如下的矩阵:

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}3&6\\4&8\end{bmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{bmatrix}3&6&6\\4&8&8\end{bmatrix}$$

- 求投影到列空间 $\boldsymbol{C}(\mathrm{A})$ 上的投影矩阵 $\mathrm{P_C}$ 和到行空间 $\boldsymbol{C}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$ 上的投影矩阵 $\mathrm{P_R}$。
- 求投影到列空间 $\boldsymbol{C}(\mathrm{B})$ 上的投影矩阵 P'_{C}，请先思考一下 $\mathrm{P_C}$ 和 P'_{C} 是否相等。
- 计算 $\mathrm{P_CAP_R}$，并解释你的结果。

解答.

- 注意到 $\mathrm{rank}(\mathrm{A})=1$，所以其列空间是由 $(3,4)$ 生成的，令 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$，从而其投影矩阵 $\mathrm{P_C}$ 为:

$$\mathrm{P_C}=\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}9&12\\12&16\end{bmatrix}$$

  其行空间是由 $(3,6)$ 生成的，令 $\boldsymbol{a}'=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$，从而其投影矩阵 $\mathrm{P_R}$ 为:

$$\mathrm{P_R}=\frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a}'^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}'}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$$

- 注意到 $\boldsymbol{C}(\mathrm{A})=\boldsymbol{C}(\mathrm{B})$，所以 $\mathrm{P}'_{\mathrm{C}}=\mathrm{P_C}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}9&12\\12&16\end{bmatrix}$。
- 计算 $\mathrm{P_CAP_R}$ 可得:

$$\mathrm{P_CAP_R}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}9&12\\12&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&6\\4&8\end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&6\\4&8\end{bmatrix}$$

  和 A 相同，这是因为:

  (1) $\mathrm{P_CA}$ 的第 i 列实际上是 A 的第 i 列到 $\boldsymbol{C}(\mathrm{A})$ 上的投影，恰好是其本身，所以 $\mathrm{P_CA}=\mathrm{A}$。

  (2) 我们有

$$\mathrm{AP_R}=((\mathrm{AP_R})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\mathrm{P}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\mathrm{P_R}\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$$

  所以 $\mathrm{AP_R}$ 的第 i 行实际上是 A 的第 i 行到 $\mathrm{C}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$ 上的投影，恰好是其本身，所以 $\mathrm{AP_R}=\mathrm{A}$。(这里我们稍稍用到了第六题中关于投影矩阵的一个性质，其是对称矩阵。)

□

3. 假设现在有 4 个点：$(0,0),(1,2),(1,3),(2,4)$:

(1) 用最小二乘法拟合出一个线性函数 $f(x)=ax+b$，列出对应的方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 并给出每个点上的误差。

(2) 用最小二乘法拟合出一个线性函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，列出对应的方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 并且给出每个点上的误差。

解答.

(1) 对应的方程为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} (\text{记为}Ax=b)$$

注意到 $\mathrm{rank}(A)=2$，从而 A^TA 是可逆的，从而我们有其最小二乘解为:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

即对应的线性函数为 $f(x)=2x+\frac{1}{4}$，每个点上的误差为:

$$\begin{aligned} e_1 &= 0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4} \\ e_2 &= 2-2\cdot 1-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4} \\ e_3 &= 3-2\cdot 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \\ e_4 &= 4-2\cdot 2-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

(2) 对应的方程为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} (\text{记为}Ax=b)$$

意到 $\mathrm{rank}(A)=3$，从而 A^TA 是可逆的，从而我们有其最小二乘解为:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = (A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即对应的二次函数为 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$，每个点上的误差为:

$$\begin{aligned} e_1 &= 0 \\ e_2 &= 2 - \frac{1}{2}1^2 - 3 \cdot 1 = -\frac{3}{2} \\ e_3 &= 3 - \frac{1}{2}1^2 - 3 \cdot 1 = -\frac{1}{2} \\ e_4 &= 4 - \frac{1}{2}2^2 - 3 \cdot 2 = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

□

4. 考虑下列矩阵 Q:

$$Q = c \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 求一个合适的 c 使得 Q 是一个正交矩阵。

(2) 求 $\boldsymbol{b} = (1, 1, 1, 1)$ 到 Q 中每一个列向量上的投影 $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_4$。

(3) 求 $\boldsymbol{b} = (1, 1, 1, 1)$ 到 Q 的列空间的投影 $\boldsymbol{p}$。

解答.

(1) 我们有:

$$Q^T Q = c^2 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

从而 $c^2 = \frac{1}{4}$，即令 $c = \pm\frac{1}{2}$，Q 是一个正交矩阵。

(2) 若 $c = 0$，则我们有 $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{0}$，否则记 $\frac{1}{c}Q$ 的列向量分别为 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_4$，我们有:

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{4}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{4}\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{4}\boldsymbol{q}_3\boldsymbol{q}_3^T\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p}_4 = \frac{1}{4}\boldsymbol{q}_4\boldsymbol{q}_4^T\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(3) 若 $c = 0$ 则我们有 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$，否则注意到 Q 的列向量都是正交的，所以我们有:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

另一个解释在于 $\boldsymbol{b} \in C(Q)$。

$\square$

5. 判断下列每组向量是线性无关的，还是正交的，还是标准正交的：

(1) $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}0.6\\0.8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0.4\\-0.3\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}$

解答.

(1) 注意到：

$$c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad c_1=c_2=0$$

从而两个向量是线性无关的，另一方面：

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})^T\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=1*(-1)+0*1=-1$$

(2) 注意到：

$$c_1\begin{bmatrix}0.6\\0.8\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0.4\\-0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad c_1=c_2=0$$

从而两个向量是线性无关的，另一方面：

$$\begin{bmatrix}0.6\\0.8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.4\\-0.3\end{bmatrix}=(\begin{bmatrix}0.6\\0.8\end{bmatrix})^T\begin{bmatrix}0.4\\-0.3\end{bmatrix}=0.6*0.4+0.8*(-0.3)=0 \quad \text{但：} \quad \|\begin{bmatrix}0.6\\0.8\end{bmatrix}\|\neq 1$$

从而这两个向量还是正交的，但不是标准正交的。

(3) 注意到：

$$c_1\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad c_1=c_2=0\text{或}\sin^2\theta=\cos^2\theta$$

从而当 $\theta\neq k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbb{Z})$ 时这两个向量是线性无关的，另一方面：

$$\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}=(\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix})^T\begin{bmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}=\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$$

从而当 $\theta\neq\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$ 时这两个向量不是正交的，尽管这两个向量都是单位向量，否则其是标准正交的。

注 0.1

将第三个向量组中的第二个向量改为 $\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$，则这两个向量是标准正交的。

$\square$

6. 给出下列语句的具体例子：

(1) 一个矩阵其列向量是标准正交的，但 $QQ^T \neq E$。

(2) 两个正交的向量但是不是线性无关的。

(3) 给出 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，其中第一个向量要求是 $\boldsymbol{q}_1 = \sqrt{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(hint：对于第三问，你可以先尝试找到一个跟 $\boldsymbol{q}_1$ 正交的向量 $\boldsymbol{q}_2$，然后再找到一个跟 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$ 都正交的向量 $\boldsymbol{q}_3$，最后将其都单位化。)

解答.

(1) 考虑矩阵 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，则我们有：

$$QQ^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq E$$

(2) 令 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}_2$ 为任意向量，则 $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 0$，从而 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 是正交的，但不是线性无关的。

(3) 考虑方程：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad 即 x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

的解，我们有：

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

是其一组基。从而 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，再利用 Gram-Schmidt 正交化方法，我们有：

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{s}_1 - \frac{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_1}\boldsymbol{s}_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{s}_2 - \frac{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_1}\boldsymbol{s}_2 - \frac{\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_2}\boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$$

将其单位化即得到了一组标准正交基：

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

□

7. 这道题帮助大家给出投影矩阵的另一个刻画。假设 P 是一个投影矩阵，即 $\mathrm{P} = \mathrm{A}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$：

(1) 证明 $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$，并且解释为什么 $\mathrm{P}(\mathrm{P}\boldsymbol{b})$ 等于 $\mathrm{P}\boldsymbol{b}$。

(2) 证明 P 是对称矩阵，即 $\mathrm{P}^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}$。

(3) 证明，对任一矩阵 C，如果其满足 $\mathrm{C}^2 = \mathrm{C}$，$\mathrm{C}^{\mathrm{T}} = \mathrm{C}$，则 C 是一个投影矩阵，即证明对任意的 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 有 $(\boldsymbol{b} - \mathrm{C}\boldsymbol{b}) \perp \mathrm{C}\boldsymbol{c}$，从而这可以成为投影矩阵的另一个定义。

(4) 证明，给定投影矩阵 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_2\mathrm{P}_1$ 当且仅当 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ 是一个投影矩阵。(利用上一问的结论)

解答.

(1) 我们有：

$$\mathrm{P}^2 = \mathrm{A}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}$$

$\mathrm{P}(\mathrm{P}\boldsymbol{b}) = \mathrm{P}\boldsymbol{b}$ 是显然的，这是因为 $\mathrm{P}(\mathrm{P}\boldsymbol{b})$ 是 $\mathrm{P}\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{C}(\mathrm{A})$ 上的投影，而 $\mathrm{P}\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{C}(\mathrm{A})$ 上的投影，从而 $\mathrm{P}\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{C}(\mathrm{A})$，所以 $\mathrm{P}(\mathrm{P}\boldsymbol{b}) = \mathrm{P}\boldsymbol{b}$。

(2) 我们有：

$$\mathrm{P}^{\mathrm{T}} = (\mathrm{A}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}((\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}$$

(3) 对任意的 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 我们有：

$$(\boldsymbol{b} - \mathrm{C}\boldsymbol{b}) \cdot \mathrm{C}\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} - \mathrm{C}\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\mathrm{C}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathrm{C}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathrm{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{C}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathrm{C}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathrm{C}^2\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathrm{C}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathrm{C}\boldsymbol{c} = 0$$

即 $(\boldsymbol{b} - \mathrm{C}\boldsymbol{b}) \perp \mathrm{C}\boldsymbol{c}$，从而 C 是一个将任一向量 $\boldsymbol{b}$ 投影到 $\boldsymbol{C}(\mathrm{C})$ 上的投影矩阵。

(4) 若 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_2\mathrm{P}_1$，我们有:

$$(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2)^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}_2^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_1^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}_2\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$$
$$(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2)^2 = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$$

从而 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ 是一个投影矩阵。

若 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ 是一个投影矩阵，则:

$$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = (\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2)^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}_2^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_1^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}_2\mathrm{P}_1$$

□