线性代数 Week 9

第九次作业

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 4 月 26 日

截止日期 2025 年 5 月 8 日晚 24 点

1. 对于下面给定的 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$，求出 $\boldsymbol{b}$ 到 V 的投影，并计算其误差和相应的投影矩阵，最后验证其误差和 $\boldsymbol{a}$ 是垂直的。
   - $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\mathrm{V} = \mathrm{span}(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\})$。
   - $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\mathrm{V} = \mathrm{span}(\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \})$。

2. 考察如下的矩阵：
$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$
   - 求投影到列空间 $\boldsymbol{C}(\mathrm{A})$ 上的投影矩阵 $\mathrm{P_C}$ 和到行空间 $\boldsymbol{C}(\mathrm{A^T})$ 上的投影矩阵 $\mathrm{P_R}$。
   - 求投影到列空间 $\boldsymbol{C}(\mathrm{B})$ 上的投影矩阵 $\mathrm{P'_C}$，请先思考一下 $\mathrm{P_C}$ 和 $\mathrm{P'_C}$ 是否相等。
   - 计算 $\mathrm{P_C A P_R}$，并解释你的结果。

3. 假设现在有 4 个点：$(0,0),(1,2),(1,3),(2,4)$:

(1) 用最小二乘法拟合出一个线性函数 $f(x)=ax+b$，列出对应的方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 并给出每个点上的误差。

(2) 用最小二乘法拟合出一个线性函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，列出对应的方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 并且给出每个点上的误差。

4. 考虑下列矩阵 Q:

$$Q=c\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

(1) 求一个合适的 c 使得 Q 是一个正交矩阵。

(2) 求 $\boldsymbol{b}=(1,1,1,1)$ 到 Q 中每一个列向量上的投影 $\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_4$。

(3) 求 $\boldsymbol{b}=(1,1,1,1)$ 到 Q 的列空间的投影 $\boldsymbol{p}$。

5. 判断下列每组向量是线性无关的，还是正交的，还是标准正交的：

(1) $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}0.6\\0.8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.4\\-0.3\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}$

6. 给出下列语句的具体例子：

   (1) 一个矩阵其列向量是标准正交的，但 $QQ^T \neq E$。
   (2) 两个正交的向量但是不是线性无关的。
   (3) 给出 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，其中第一个向量要求是 $\boldsymbol{q}_1 = \sqrt{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

   (hint：对于第三问，你可以先尝试找到一个跟 $\boldsymbol{q}_1$ 正交的向量 $\boldsymbol{q}_2$，然后再找到一个跟 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$ 都正交的向量 $\boldsymbol{q}_3$，最后将其都单位化。)

7. 这道题帮助大家给出投影矩阵的另一个刻画。假设 P 是一个投影矩阵，即 $P = A(A^T A)^{-1}A^T$:

   (1) 证明 $P^2 = P$，并且解释为什么 $P(P\boldsymbol{b})$ 等于 $P\boldsymbol{b}$。
   (2) 证明 P 是对称矩阵，即 $P^T = P$。
   (3) 证明，对任一矩阵 C，如果其满足 $C^2 = C$，$C^T = C$，则 C 是一个投影矩阵，即证明对任意的 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 有 $(\boldsymbol{b} - C\boldsymbol{b}) \perp C\boldsymbol{c}$，从而这可以成为投影矩阵的另一个定义。
   (4) 证明，给定投影矩阵 P_1, P_2，$P_1P_2 = P_2P_1$ 当且仅当 P_1P_2 是一个投影矩阵。(利用上一问的结论)