上海师范大学 Shanghai Normal University

《线性代数》

1-向量介绍 (Introduction to Vectors)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025 年 2 月 6 日

主要内容

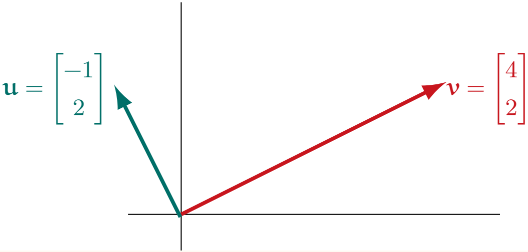
- 向量加法和数乘
- 向量长度和点积
- 矩阵

向量加法和数乘

向量 (Vectors)

首先我们来考察一下二维空间中的向量，用**列向量 (colomn vectors)** 来表示：

- $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$



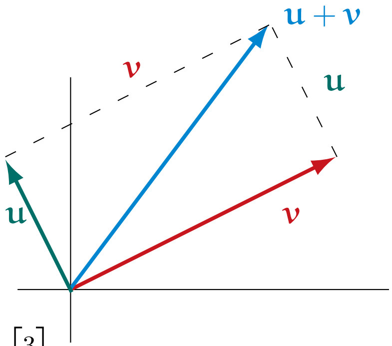
符号说明

在本课程的课件中，我们使用 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \dots$ 等符号来表示向量，**特别的，如果没有额外说明的话，指的均是列向量**; 使用 $x, y, z, \dots$ 等符号来表示标量的值；特别的对于一个向量 $\mathbf{u}$ 来说，我们经常使用 u_i 表示其第 i 个分量的值。

向量加法 (Vector Addition)

向量加法:

$$\underset{\mathbf{u}}{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}} + \underset{\boldsymbol{v}}{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{u}+\boldsymbol{v}}{\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}}$$



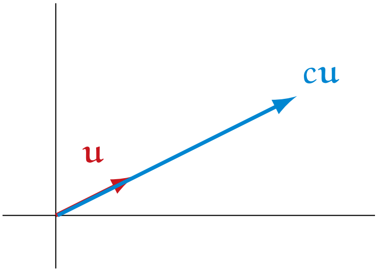
- 一个例子: $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

向量数乘 (Scalar Multiplication)

向量数乘

$$c \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \end{bmatrix}$$

其中 c 是一个标量，也称为 scalar.

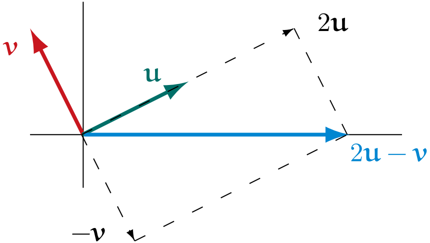


- 一个例子：$3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

向量的线性组合

考虑如下的例子:

$$2\mathbf{u}-\mathbf{v}=2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$$



向量的线性组合

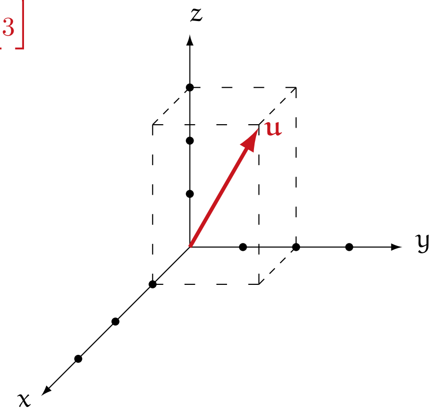
$$c\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cu_1+dv_1\\cu_2+dv_2\end{bmatrix}$$

$$c\mathbf{u}\qquad d\mathbf{v}\qquad c\mathbf{u}+d\mathbf{v}$$

向量在三维的情况

- 二维向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 可以视作在 2 维 xOy 平面上从 $(0,0)$ 指向 (x,y) 的一个有向线段。
- 三维向量也是类似的，只不过是在 3 维空间中从 $(0,0,0)$ 指向 (x,y,z) 的一个有向线段，

  比如考察向量 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$：



三维向量的线性组合

给定 3 维的向量:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

其线性组合也是类似的:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = 1\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} + 2\boldsymbol{v} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} + 4\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

三个问题

假设 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 是三维空间的三个向量:

- 所有形如 $c\mathbf{u}$ 的线性组合对应的几何直观是什么?
- 所有形如 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ 的线性组合对应的几何直观是什么?
- 所有形如 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} + e\mathbf{w}$ 的线性组合对应的几何直观是什么?

答案当然依赖于 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 的具体取值，但是我们可以通过一些例子来感受一下。

三个问题 (II)

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

---

1. 形如 $c\mathbf{u}$ 的线性组合填满了一条通过 $(0, 0, 0)$ 的线。
2. 形如 $c\mathbf{u} + d\boldsymbol{v}$ 的线性组合填满了一个通过 $(0, 0, 0)$ 的平面。
   - $(2, 3, -1)$ 便不在此平面上，因此 $\boldsymbol{w}$ 无法表示成 $c\mathbf{u} + d\boldsymbol{v}$ 的线性组合。
3. 形如 $c\mathbf{u} + d\boldsymbol{v} + e\boldsymbol{w}$ 的线性组合填满了整个三维空间。
   - 这意味着对于任何的 $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ 2y + 3z &= b \\ 3x + y - z &= c \end{aligned}$$

存在一个解。

问题 1.

描述一下由向量 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的线性组合在三维空间中所组成的平面。

解： 形如 $c\mathbf{u} + d\boldsymbol{v}$ 的线性组合填满了一个通过 $(0, 0, 0)$ 的平面，我们有：

$$c\mathbf{u} + d\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} c \\ c + d \\ d \end{bmatrix}$$

c, d 是任意的，所以该平面包含了所有第二维是第一维和第三维的和的向量。 □

阶段总结

1. 二维向量是一个具有两个分量的有序对，可以视作二维平面原点出发的一个有向线段。
2. 向量的加法和数乘是针对对应分量进行操作。
3. 向量之间的线性组合是指形如 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} + e\mathbf{w}$ 的向量。
4. 在三维空间中，向量的线性组合可以填满一条线，一个平面，或者整个三维空间。

向量长度和点积

说明

为了节省空间，列向量 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ 有时使用 (u_1, u_2, u_3) 表示。

我们来考察两维中的向量，给定两个向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$，$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$：

1. 向量 $\mathbf{u}$ 的长度 $\|\mathbf{u}\|$ 是多少？

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

2. 向量 $\mathbf{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角 θ 是多少？

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$$

这些问题我们都可以使用**点积 (dot product)**的概念来解决。

点积 (Dot Products)

定义 2 **[点积].**

向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ 的点积 $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{v}$ 定义为:

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

一般的，对于向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$，其点积定义为:

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

点积的一些性质

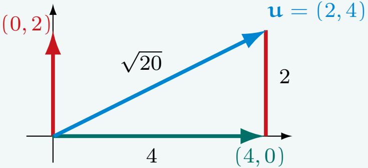
1. $\mathbf{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是垂直的 (perpendicular) 当且仅当 $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$。
2. 点积是可交换的，即 $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{u}$。

定义 3 **[向量的长度].**

向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ 的长度 $\|\mathbf{u}\|$ 定义为:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

勾股定理 (Pythagorean Law)



一般来说，对于垂直的 $\mathbf{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$:

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\mathbf{u} - \boldsymbol{v}\|^2$$

定义 4.

长度为 1 的向量 $\mathbf{u}$ 被称作为单位向量，即 $\|\mathbf{u}\| = 1$.

例 5

如下的向量都是单位向量:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

单位化 (Normalization)

给定一个向量 $\mathbf{u} = (2, 2, 1)$，其长度为:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

我们可以将其缩小成一个单位向量:

$$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

引理 6.

给定一个非零向量 $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$，则:

$$\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = (\frac{u_1}{\|\mathbf{u}\|}, \ldots, \frac{u_n}{\|\mathbf{u}\|})$$

是一个与 $\mathbf{u}$ 同方向的单位向量。

互相垂直的向量

现在我们来说明点积值和向量之间的夹角的关系:

引理 7.

令 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$，如果 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是垂直的，则：$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$。

证明：由勾股定理，我们有:

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$

将其展开有:

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 &= (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 \\ u_1 v_1 + u_2 v_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

说明

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是垂直的。
2. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$，零向量 $\mathbf{0}$ 与任何向量都是垂直的。

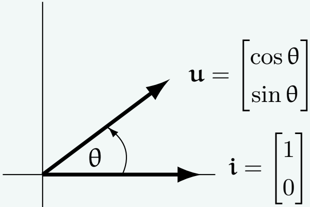
定理 8.

令 $\mathbf{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ 是两个单位向量，θ 是 $\mathbf{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角，则:

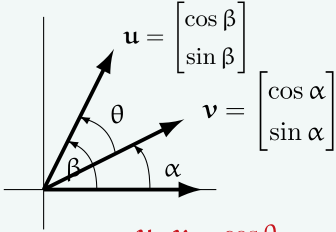
$$\cos\theta = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{v}$$

几何视角

1. $\boldsymbol{v} = \mathbf{i} = (1, 0)$，则有 $\cos\theta = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1$。
2. $\boldsymbol{v} \neq (1, 0)$，则可以视其旋转了 α 角度，其中 $\boldsymbol{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$。



$\mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = \cos\theta$



$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{v} = \cos\theta$

向量之间的夹角 (II)

证明：[定理 8的证明]

- 若 $\boldsymbol{v} = (1,0)$，则易得 $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 = \cos\theta$.
- 若 $\boldsymbol{v} \neq (1,0)$，则可以视 $\boldsymbol{v}$ 是由 $(1,0)$ 旋转了 α 角度得到的单位向量，即 $\boldsymbol{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$; 同理令 $\mathbf{u} = (\cos\beta, \sin\beta)$，则其夹角为 $\theta = \beta - \alpha$，并且：

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{v} = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \cos(\beta - \alpha) = \cos\theta$$

$\square$

如果 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 不是单位向量，怎么求其夹角？

- 将其单位化。

定理 9.

令 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ 是两个非零向量，θ 是 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 之间的夹角，则：

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

定理 10 **[Cauchy-Schwarz-Buniakowsky].**

对任意的 $\mathbf{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$，有:

$$|\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$$

证明：由定理??以及对任意的 θ 有 $|\cos\theta| \leqslant 1$，即有:

$$|\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$$

$\square$

额外说明

事实上，存在一个不基于 $\cos$ 的证明使得上述定理对所有 $\mathbb{R}^n$ 的向量均成立，即:

定理 **[Cauchy-Schwarz-Buniakowsky].**

对任意的 $\mathbf{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$，有:

$$|\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$$

定理 11 **[三角不等式].**

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

证明： 我们同样使用一个不用余弦定理的方法来证明。

注意到：

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &\leqslant \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

从而我们有：

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 \leqslant (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$$

□

问题

如何证明 $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$?

1. 向量的点积是相应部分的乘积的和，即 $\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + \ldots u_nv_n$。
2. 向量的长度是点积的平方根，其对应的单位向量为：$\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$，长度为 1。
3. $\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ 意味着两个向量 $\mathbf{u},\boldsymbol{v}$ 是垂直的。
4. 向量夹角的余弦值等于点积除以长度的乘积，即:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$$

5. 柯西-施瓦茨不等式和三角不等式。

$$|\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\|\|\boldsymbol{v}\|, \qquad \|\mathbf{u}+\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$$

矩阵

给定三个向量:

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

其线性组合可以表示为 $x_1\boldsymbol{u}+x_2\boldsymbol{v}+x_3\boldsymbol{w}$, 也就是:

$$x_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix}$$

矩阵表示

我们可以利用矩阵来表示上述行为:

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix}$$

我们可以理解成，矩阵 A 作用在一个列向量 $\mathbf{x}$ 上，其结果是矩阵 A 中的列向量的线性组合。

$$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2-x_1\\ x_3-x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}=\mathbf{b}$$

例 12

上述的矩阵 A 被称作差分矩阵(difference matrix)，因为其得到的向量是原向量的差分。

$$A\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-0\\ 4-1\\ 9-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{bmatrix}$$

我们现在用行的角度来看待矩阵作用在向量上的结果:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,0,0)\cdot\mathbf{x} \\ (-1,1,0)\cdot\mathbf{x} \\ (0,-1,1)\cdot\mathbf{x} \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

补充说明

这是大多数中文教材中定义的方式。

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

- 之前我们讨论的是线性组合，即给定三个向量 $\mathbf{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 和三个数 x_1, x_2, x_3，求其线性组合 $x_1\mathbf{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w}$; 将矩阵 A 看成 $\begin{bmatrix} \mathbf{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$ 的话，即知道了 A 和 $\boldsymbol{x}$，求 $\mathbf{b}$。
- 现在我们来考虑另一个问题：给定矩阵 A 和 $\mathbf{b}$，求 $\boldsymbol{x}$。

线性方程组 (II)

上海师范大学 Shanghai Normal University

一个大家更为熟知的形式：线性方程组 (Linear Equations):

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= b_1 \\ -x_1 + x_2 + 0x_3 &= b_2 \\ 0x_1 - x_2 + x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

不难验证，其解可以表示为：

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ x_2 &= b_1 + b_2 \\ x_3 &= b_1 + b_2 + b_3 \end{aligned}$$

上述过程也可以写成另一个矩阵:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\mathbf{b}$$

上述矩阵称为差分矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1}。

我们再来进行一下对比:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

另一个例子 (I)

给定三个向量:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其线性组合可以表示为 $x_1\mathbf{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w}$，也就是:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}$$

矩阵表示

我们将上述矩阵记为 C，也被称为循环差分矩阵 (cyclic difference matrix):

$$C\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}$$

与 A 的不同的是，$C\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 不一定有解。

$$C\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-x_3\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$$ 没有解。

$x_1\boldsymbol{u}+x_2\boldsymbol{v}+x_3\boldsymbol{w}$ 的几何直观

换个角度讲，$x_1\boldsymbol{u}+x_2\boldsymbol{v}+x_3\boldsymbol{w}$ 的所有线性组合并没有充满了整个 3 维空间。事实上，其仅仅覆盖了如下的一个平面：

$$b_1+b_2+b_3=0$$

更多的讨论

无关性和相关性 (Independence and Dependence)

- 在上述 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的例子中，$x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $x = y = z = 0$。
  后面的课程中我们会知道:
  1. $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 是线性无关的。
  2. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有且只有一个零解，这时候 A 一定是方阵，我们称其是可逆矩阵 (invertible matrix)。
- 在上述 $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的例子中，存在任意多个 x, y, z 满足 $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = \mathbf{0}$。
  后面的课程中我们会看到:
  1. $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 是线性相关的。
  2. $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有无穷多个解，这时候 C 也不一定是方阵，我们称 C 是一个奇异矩阵 (singular matrix)。

阶段总结

1. 矩阵作用在向量 $A\boldsymbol{x}$ = 矩阵 A 的列向量的线性组合。
2. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ 的解为 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\mathbf{b}$。
3. $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 存在无穷多个解，C 没有逆矩阵。

注意

我们并没有给出严格的相关定义，但我们已经描述了这些关键的想法。