



上海师范大学
Shanghai Normal University

《线性代数》

10-行列式 (I)(Determinants(I))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025年5月5日



复习：最小二乘法 (I)



上海师范大学
Shanghai Normal University

假设 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵, $\text{rank}(A) = n$ 。

1. 我们知道如果 $\hat{x} \in \mathbb{R}$ 满足:

$$A^T(A\hat{x} - b) = 0 \quad \text{即} \quad A^T A \hat{x} = A^T b$$

则 $A\hat{x} - b$ 与 $C(A)$ 正交。

2. 我们可以得到 \hat{x} 的表达式:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

并且我们知道 \hat{x} 是唯一的。

3. 我们称 \hat{x} 就是**最小二乘解** (least square solution), 因为其误差的长度 $\|e\|$

$$e = b - Ax$$

是所有 $b - Ax$ 中最小的。



复习：最小二乘法 (II)



假设 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵, $\text{rank}(A) < n$ 。

1. 选择 $C(A)$ 的一组基 $\{\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}\}$, 其中 $r = \text{rank}(A)$ 。
2. 定义 $m \times r$ 的矩阵:

$$A' = [\mathbf{a}_{i_1} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{i_r}]$$

显然我们有: $C(A) = C(A')$

3. $\text{rank}(A')$ 是列满秩的, 所以我们可以利用前面的方法来找到 $A'x' = \mathbf{b}$ 的最优近似解, 即:

$$\hat{x}' = (A'^T A')^{-1} A'^T \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

显然其误差 $e = \mathbf{b} - A'\hat{x}'$ 是所有 $\mathbf{b} - Ax$ 中长度最小的, 即:

$$\|e\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - Ax\| = \min\{\|\mathbf{b} - v\| \mid v \in C(A')\} == \min\{\|\mathbf{b} - v\| \mid v \in C(A)\}$$

4. 我们需要的 $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ 只要满足:

$$A\hat{x} = A'\hat{x}'$$



复习：标准正交、正交矩阵



上海师范大学
Shanghai Normal University

定义 1

[Orthonormal Vectors].

$\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n \in \mathbb{R}^m$ 是标准正交的 (orthonormal), 如果:

$$\mathbf{q}_i^\top \mathbf{q}_j = \begin{cases} 0 & \text{当 } i \neq j, \text{ 即 } \mathbf{q}_i \text{ 和 } \mathbf{q}_j \text{ 是正交的} \\ 1 & \text{当 } i = j, \text{ 即 } \mathbf{q}_i \text{ 是单位向量} \end{cases}$$

我们将列向量是标准正交的矩阵记为 Q , 显然我们有:

$$Q^\top Q = E$$

定义 2

[正交矩阵 (Orthogonal Matrix)].

称一个 $n \times n$ 的矩阵 Q 是正交矩阵 (Orthogonal Matrix), 如果:

$$Q^\top Q = E$$

或者等价的说, 其列向量 $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n \in \mathbb{R}^n$ 也是标准正交的。

定理 3.

令 Q 是一个 $n \times n$ 的矩阵，则：

$$Q \text{是正交矩阵} \iff Q \text{是可逆的并且 } Q^{-1} = Q^T$$

推论 4.

如果 Q 是一个正交矩阵，则其行向量也是标准正交的。

定理 5.

令 Q 是一个 $n \times n$ 的正交矩阵，则对于任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ，我们有：

1. $\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$
2. $\mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qy} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$



复习：Gram-Schmidt 正交化



上海师范大学
Shanghai Normal University

定理 6.

令 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ 是线性无关的。则存在一组向量 $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n \in \mathbb{R}^m$, 满足：

- 对于任意的 $i \neq j \in [n]$, $\mathbf{q}_i \perp \mathbf{q}_j$ 。
- $\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}) = \text{span}(\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n\})$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{q}_1^\top \mathbf{a}_2}{\mathbf{q}_1^\top \mathbf{q}_1} \mathbf{q}_1$$

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{q}_1^\top \mathbf{a}_3}{\mathbf{q}_1^\top \mathbf{q}_1} \mathbf{q}_1 - \frac{\mathbf{q}_2^\top \mathbf{a}_3}{\mathbf{q}_2^\top \mathbf{q}_2} \mathbf{q}_2$$

⋮

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{a}_n - \frac{\mathbf{q}_1^\top \mathbf{a}_n}{\mathbf{q}_1^\top \mathbf{q}_1} \mathbf{q}_1 - \frac{\mathbf{q}_2^\top \mathbf{a}_n}{\mathbf{q}_2^\top \mathbf{q}_2} \mathbf{q}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{q}_{n-1}^\top \mathbf{a}_n}{\mathbf{q}_{n-1}^\top \mathbf{q}_{n-1}} \mathbf{q}_{n-1}$$



定理 7.

令 A 是一个 $n \times n$ 的可逆矩阵，则存在一个正交矩阵 Q 和一个主对角元是正数的上三角矩阵 R ，使得

$$A = QR$$

特别的，该分解是唯一的。

$$A = QR = \begin{bmatrix} \frac{q_1}{\|q_1\|} & \dots & \frac{q_n}{\|q_n\|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|q_1\| & \frac{q_1^\top a_2}{\|q_1\|} & \dots & \frac{q_1^\top a_n}{\|q_1\|} \\ 0 & \|q_2\| & \dots & \frac{q_2^\top a_n}{\|q_2\|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|q_n\| \end{bmatrix}$$



主要内容



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 什么是行列式
- 行列式的性质
- 行列式的计算



什么是行列式

► 什么是行列式?



第一次学行列式的时候，碰到的两个问题：

- 什么是行列式？
- 行列式有什么用？



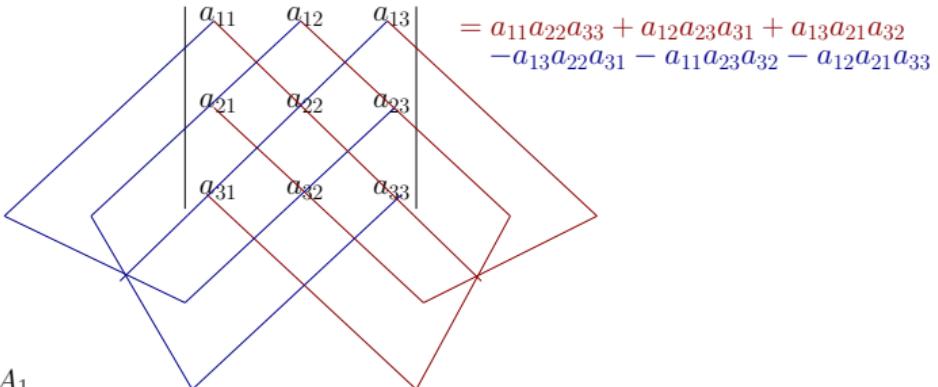
目 录

第1章 行列式	1
§ 1 二阶与三阶行列式	1
§ 2 全排列和对换	4
§ 3 n 阶行列式的定义	5
§ 4 行列式的性质	7
§ 5 行列式按行(列)展开	15
习题一	21
第2章 矩阵及其运算	24
§ 1 线性方程组和矩阵	24
§ 2 矩阵的运算	29
§ 3 逆矩阵	39
§ 4 克拉默法则	44
§ 5 矩阵分块法	46
习题二	52
第3章 矩阵的初等变换与线性方程组	56

学到的知识



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



$$\frac{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}{(A)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^2 a_{11} A_{11} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} A_{1n}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

$$= (-1)^2 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



但是



为什么?

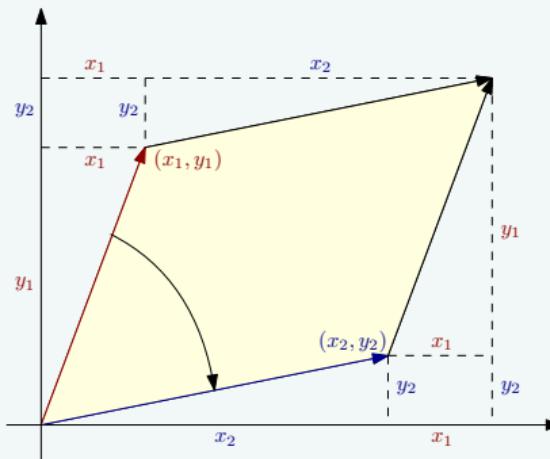
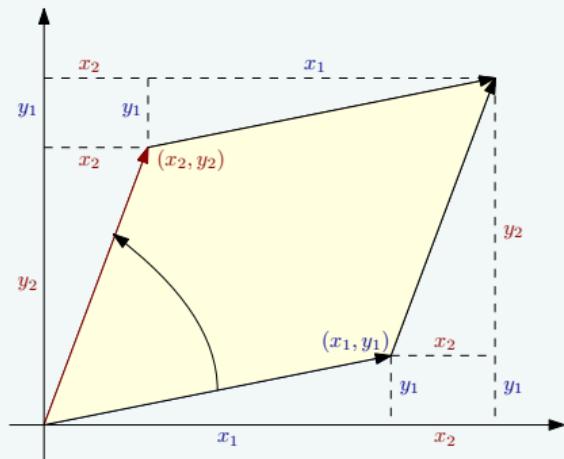


行列式究竟想算什么?

我们以 2×2 的行列式为例:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$$

向量 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 围成的平行四边形的有向面积

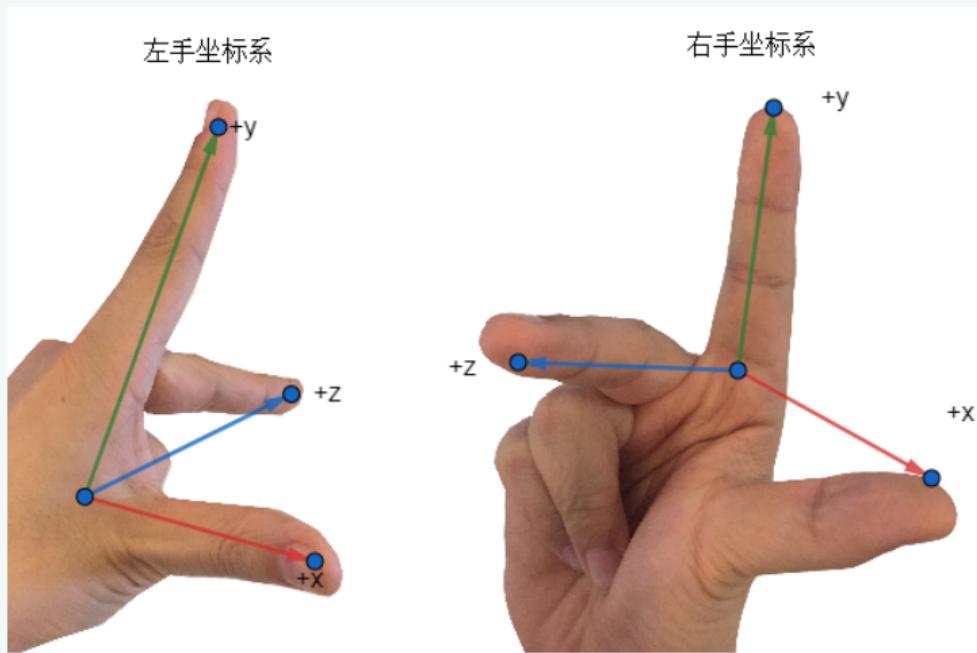


三维空间的有向体积



上海师范大学
Shanghai Normal University

左手系 VS 右手系





n 维空间的有向体积



对于 n 维空间 n 个向量构成的多面体：

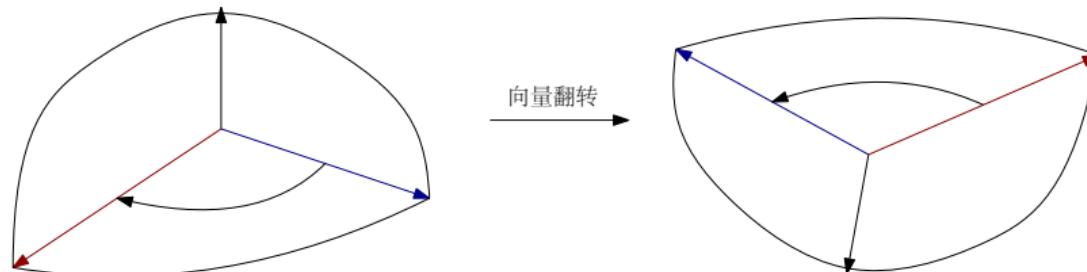
$$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n, \quad \text{记其体积为 } D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n)$$

我们将其两个向量对换位置：

$$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n, \quad \text{记其体积为 } D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)$$

我们应当有：

$$D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)$$





行列式的一个前瞻

行列式想求取的是：

在 n 维空间的 n 个向量张成的平行六面体 (n -dimensional parallelepiped) 的**有向体积**。

但行列式的值，存储了对应**方阵**的很多信息。

- (Pivot Formula)，我们将证明 $\det A$ 和 A 中所有首元的乘积的绝对值相同。
- (Big Formula)，我们将说明 $\det A$ 是 $n!$ 个不同元素组合之和。
- (Cofactor Expansion)，我们将证明 $\det A$ 是 A 中一些子行列式的线性组合。

从而我们可以得到很多矩阵的性质。

1. (Invertibility)， A 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$ 。
2. (rank)， A 的秩等于 A 的行列式的非零子式的个数。
3. (Cramer Rules)，我们可以用行列式来求解线性方程组。
4. (Eigenvalues)，这是我们接下来要讨论的内容。
5. ...



关于行列式的几何解释



令 $A = [a_1 \ \cdots \ a_n]$ 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 方阵 A 的行列式 $\det(A)$ 是由 a_1, \dots, a_n 在 n 维空间长成的平行六面体 (n -dimensional parallelepiped) 的有向体积。

我们希望通过其的基本性质最终给出行列式对应的值, 即最终一步一步得到 $\det(A)$ 相当于关于 a_1, \dots, a_n 的函数:

$$\det(A) = D(a_1, \dots, a_n)$$



行列式的性质



行列式的基本性质 (I)



对于 \mathbb{R}^n 的如下 n 个向量:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$D(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

这也就是

- $\det(E) = 1$ 。



行列式的基本性质 (II)



上海师范大学
Shanghai Normal University

对于 n 个 \mathbb{R}^n 的向量

$$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$$

我们有：

$$D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)$$

这也就是：

- 交换两列改变行列式的符号：

$$\det([\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n]) = -\det([\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n])$$



行列式的基本性质 (III)



行列式的值应当对于每列都是线性的：

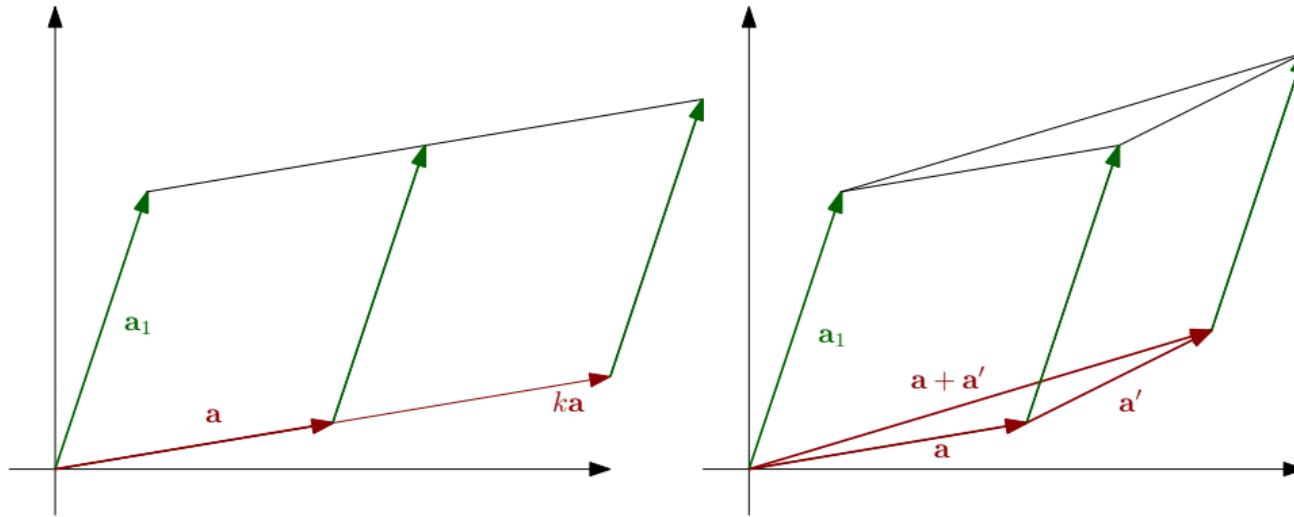
- $D(a_1, \dots, c a_i, \dots, a_n) = c D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ 。
- $D(a_1, \dots, a_i + a'_i, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + D(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n)$ 。

这也就是：

- 行列式的值对于每一列都是满足线性的：

$$\det([a_1 \cdots (c a_i + d a'_i) \cdots a_n]) = c \det([a_1 \cdots a_i \cdots a_n]) + d \det([a_1 \cdots a'_i \cdots a_n])$$

基本性质 (III) 在 2 维的几何解释



记 S_1 是 \mathbf{a}, \mathbf{a}_1 张成的平行四边形的有向面积, S_2 是 $k\mathbf{a}, \mathbf{a}_1$ 张成的平行四边形的有向面积, S_3 是 $\mathbf{a}', \mathbf{a}_1$ 张成的平行四边形的有向面积, S_4 是 $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$, \mathbf{a}_1 张成的平行四边形的有向面积, 则:

$$S_2 = kS_1$$

$$S_4 = S_1 + S_3$$



我们的目标



回顾我们目前所做的，对于 n 维空间的 n 个向量 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ ，我们希望定义一个函数 D ，满足下列性质：

- $D(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$
- $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)$
- $D(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_i + d\mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n) = cD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) + dD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n)$

我们希望说明：

D是存在的且唯一的

而这就是我们想要的行列式，即：

$$\det(A) = \det([\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]) = D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

我们也会将其记作：

$$|A| \text{ 或者 } \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在接下来的内容中，我们将分不加区分的使用 $n \times n$ 的矩阵 A 和其 n 个对应的列向量 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ 。

定理 8.

- 如果 A 存在一个列向量是 $\mathbf{0}$ ，则 $\det(A) = 0$ 。
- 如果 A 存在两列向量相同，则 $\det(A) = 0$ 。
- 如果 A 存在一列是其他列的倍数，则 $\det(A) = 0$ 。

证明：不妨假设 A 的第一列是 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ ，则我们有：

$$D(\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) + D(\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

从而：

$$\det(A) = D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$$

衍生性质 (I)-证明



证明：

- 如果 A 存在两列向量相同，不妨记为 $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$ ，则我们有：

$$D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n)$$

从而：

$$\det(A) = D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$$

- 如果 A 存在一列是其他列的倍数，不妨记为 $\mathbf{a}_i = c\mathbf{a}_j$ ，则我们有：

$$\det(A) = D(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = cD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$$

定理 9.

如果 $\text{rank}(A) < n$, 则 $\det(A) = 0$ 。

证明: 由 $\text{rank}(A) < n$ 可知 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ 是线性相关的, 即存在 $1 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$ 和 c_1, \dots, c_k 使得:

$$\mathbf{a}_{i_0} = c_1 \mathbf{a}_{i_1} + \dots + c_k \mathbf{a}_{i_k}$$

从而我们有:

$$\begin{aligned}\det(A) &= D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i_0}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= D(\mathbf{a}_1, \dots, c_1 \mathbf{a}_{i_1} + \dots + c_k \mathbf{a}_{i_k}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= \sum_{j=1}^k c_j D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i_j}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= 0\end{aligned}$$

定理 10.

将矩阵的某些列的线性组合加到另一列上 (其他列不改变), 行列式的值保持不变。

证明: 利用:

- $D(a_1, \dots, c a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) = c D(a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) = 0$

可知:

$$D(a_1, \dots, a_i + \sum_{i=1}^n c_i a_i, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, a_n)$$



对角矩阵的行列式值

定理 11.

令 A 是一个 $n \times n$ 的对角矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有：

$$\det(A) = a_1 a_2 \cdots a_n$$



三角矩阵的行列式值



定理 12.

令 A 是一个 $n \times n$ 的三角矩阵 (triangular matrix):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{或者} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 行列式的几何意义。
- 行列式需要满足的基本性质。
- 由这些性质衍生的一些性质。

我们的目标

考虑一个 $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ 的函数 D , 其满足下列三个性质:

- $D(e_1, \dots, e_n) = 1$
- $D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -D(a_1, \dots, \textcolor{red}{a_j}, \dots, \textcolor{red}{a_i}, \dots, a_n)$
- $D(a_1, \dots, ca_i + da'_i, \dots, a_n) = cD(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + dD(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n)$

我们希望说明, 这样的函数 D 存在而且唯一, 从而其就是对应的行列式 $\det(A)$ 。

我们的思路



为了证明这样的 D 存在且唯一，我们希望：

- 通过 D 的性质，我们尝试计算出对于任意的 $n \times n$ 的矩阵 A ，其对应的函数值。
- 如果对于每个 $n \times n$ 的矩阵 A ，我们都能计算出一个唯一的函数值，那么我们就可以说明 D 是存在且唯一的。



行列式的计算



列加法



令 $i, j \in [n]$, 我们将第 j 列的 l 倍加到第 i 列上, 我们有:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + la_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + la_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = \det(A)$$



列交换



令 $i, j \in [n]$, 我们将第 j 列和第 i 列互换, 我们有:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = -\det(A)$$



列乘法



令 $i \in [n]$ 和 $l \in \mathbb{R}$, 我们将第 i 列乘以 l 倍, 我们有:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & la_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & la_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = l \det(A)$$



计算任意 $n \times n$ 矩阵的行列式的值



计算行列式 A 的值

1. 我们对 A 进行初等列变换，或者等价地说，对 A^T 进行初等行变换。最终我们可以得到一个 A^T 的行阶梯形 R 。从而 R^T 是一个下三角矩阵。令其对角线的元素为 d_1, \dots, d_n ，则我们有：

$$\det(R^T) = d_1 \cdots d_n$$

2. 我们根据 A 变成 R^T 的过程，注意到这个过程中得每一步都是列变换，从而根据前面得结论一步步反推得到 $\det(A)$ 的值。

定理 13.

$\text{rank}(A) = n$ 当且仅当 $\det(A) \neq 0$ 。



一些例子 (I)



上海师范大学
Shanghai Normal University

考察 2×2 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d - \frac{cb}{a} \end{bmatrix}$$

从而:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d - \frac{cb}{a} \end{vmatrix} = a \cdot \left(d - \frac{cb}{a}\right) = ad - bc$$



一些例子 (II)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -4 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 8 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 8 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

则我们有：

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot \frac{1}{2} = -4$$



一些例子 (III)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 5 & -\frac{5}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & -\frac{9}{10} \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & 0 \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而：

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & 0 \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) \cdot 0 = 0$$

一些例子 (IV)

$$\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a - \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

从而：

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}\right) = \left|\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}\right| = a \left|\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a - \frac{1}{a} \end{bmatrix}\right| = a^{n-1} \left(a - \frac{1}{a}\right) = a^n - a^{n-2}$$

回顾一下我们对 $\det A$ 的计算：

1. 根据我们的理解， $\det A$ 如果存在，一定要满足三条基本性质。
2. 我们推得了关于 $\det A$ 的一些其他性质。
3. 通过上述的讨论，我们知道初等列变换对 $\det A$ 的影响。
4. 而通过初等列变换，我们可以将 A 转变成一个下三角矩阵 L .
5. 我们知道 $\det(L)$ 是多少，从而根据 3 和 4，我们可以从 $\det L$ 得到 $\det(A)$ 的值。

上述的过程说明了 $\det A$ 的存在性



阶段总结

- 我们描绘了行列式想计算的内容

在 n 维空间的 n 个向量张成的平行六面体 (n -dimensional parallelepiped) 的有向体积

- 由此出发，我们假定了 $\det(A)$ 该满足的三条性质

- $D(e_1, \dots, e_n) = 1$
- $D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -D(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$
- $D(a_1, \dots, c a_i + d a'_i, \dots, a_n) = c D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + d D(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n)$

- 我们通过这三条性质推导了一些其他性质。
- 我们通过初等列变换，将 A 转变成一个下三角矩阵 L ，从而得到了 $\det(A)$ 的值。这一构造过程，说明了 $\det(A)$ 的存在性。