



上海师范大学
Shanghai Normal University

《线性代数》

10-行列式 (I)(Determinants(I))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025 年 5 月 5 日

复习：最小二乘法 (I)

假设 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵, $\text{rank}(A) = n$ 。

1. 我们知道如果 $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}$ 满足:

$$A^T(A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad \text{即} \quad A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$$

则 $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{C}(A)$ 正交。

2. 我们可以得到 $\hat{\mathbf{x}}$ 的表达式:

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$$

并且我们知道 $\hat{\mathbf{x}}$ 是唯一的。

3. 我们称 $\hat{\mathbf{x}}$ 就是最小二乘解 (least square solution), 因为其误差的长度 $\|\mathbf{e}\|$

$$\mathbf{e} = \mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$$

是所有 $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$ 中最小的。

假设 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵, $\text{rank}(A) < n$ 。

1. 选择 $C(A)$ 的一组基 $\{\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}\}$, 其中 $r = \text{rank}(A)$ 。
2. 定义 $m \times r$ 的矩阵:

$$A' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{i_1} & \cdots & \mathbf{a}_{i_r} \end{bmatrix}$$

显然我们有: $C(A) = C(A')$

3. $\text{rank}(A')$ 是列满秩的, 所以我们可以利用前面的方法来找到 $A'\mathbf{x}' = \mathbf{b}$ 的最优近似解, 即:

$$\hat{\mathbf{x}}' = (A'^T A')^{-1} A'^T \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

显然其误差 $\mathbf{e} = \mathbf{b} - A'\hat{\mathbf{x}}'$ 是所有 $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$ 中长度最小的, 即:

$$\|\mathbf{e}\| = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| = \min\{\|\mathbf{b} - \mathbf{v}\| \mid \mathbf{v} \in C(A')\} = \min\{\|\mathbf{b} - \mathbf{v}\| \mid \mathbf{v} \in C(A)\}$$

4. 我们需要的 $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ 只要满足:

$$A\hat{\mathbf{x}} = A'\hat{\mathbf{x}}'$$

定义 1

[Orthonormal Vectors].

$\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n \in \mathbb{R}^m$ 是标准正交的 (orthonormal), 如果:

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \begin{cases} 0 & \text{当 } i \neq j, \text{ 即 } \mathbf{q}_i \text{ 和 } \mathbf{q}_j \text{ 是正交的} \\ 1 & \text{当 } i = j, \text{ 即 } \mathbf{q}_i \text{ 是单位向量} \end{cases}$$

我们将列向量是标准正交的矩阵记为 Q , 显然我们有:

$$Q^T Q = E$$

定义 2

[正交矩阵 (Orthogonal Matrix)].

称一个 $n \times n$ 的矩阵 Q 是正交矩阵 (Orthogonal Matrix), 如果:

$$Q^T Q = E$$

或者等价的说, 其列向量 $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n \in \mathbb{R}^n$ 也是标准正交的。

定理 3.

令 Q 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 则:

$$Q \text{ 是正交矩阵} \iff Q \text{ 是可逆的并且 } Q^{-1} = Q^T$$

推论 4.

如果 Q 是一个正交矩阵, 则其行向量也是标准正交的。

定理 5.

令 Q 是一个 $n \times n$ 的正交矩阵, 则对于任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, 我们有:

1. $\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$
2. $Q\mathbf{x} \cdot Q\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

定理 6.

令 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ 是线性无关的。则存在一组向量 $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n \in \mathbb{R}^m$, 满足:

- 对于任意的 $i \neq j \in [n]$, $\mathbf{q}_i \perp \mathbf{q}_j$ 。
- $\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}) = \text{span}(\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n\})$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{q}_1^\top \mathbf{a}_2}{\mathbf{q}_1^\top \mathbf{q}_1} \mathbf{q}_1$$

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{q}_1^\top \mathbf{a}_3}{\mathbf{q}_1^\top \mathbf{q}_1} \mathbf{q}_1 - \frac{\mathbf{q}_2^\top \mathbf{a}_3}{\mathbf{q}_2^\top \mathbf{q}_2} \mathbf{q}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{a}_n - \frac{\mathbf{q}_1^\top \mathbf{a}_n}{\mathbf{q}_1^\top \mathbf{q}_1} \mathbf{q}_1 - \frac{\mathbf{q}_2^\top \mathbf{a}_n}{\mathbf{q}_2^\top \mathbf{q}_2} \mathbf{q}_2 - \dots - \frac{\mathbf{q}_{n-1}^\top \mathbf{a}_n}{\mathbf{q}_{n-1}^\top \mathbf{q}_{n-1}} \mathbf{q}_{n-1}$$

定理 7.

令 A 是一个 $n \times n$ 的可逆矩阵, 则存在一个正交矩阵 Q 和一个主对角元是正数的上三角矩阵 R , 使得

$$A = QR$$

特别的, 该分解是唯一的。

$$A = QR = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{q}_1}{\|\mathbf{q}_1\|} & \cdots & \frac{\mathbf{q}_n}{\|\mathbf{q}_n\|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\mathbf{q}_1\| & \frac{\mathbf{q}_1^\top \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{q}_1\|} & \cdots & \frac{\mathbf{q}_1^\top \mathbf{a}_n}{\|\mathbf{q}_1\|} \\ 0 & \|\mathbf{q}_2\| & \cdots & \frac{\mathbf{q}_2^\top \mathbf{a}_n}{\|\mathbf{q}_2\|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|\mathbf{q}_n\| \end{bmatrix}$$



- › 什么是行列式
- › 行列式的性质
- › 行列式的计算

► 什么是行列式

什么是行列式?

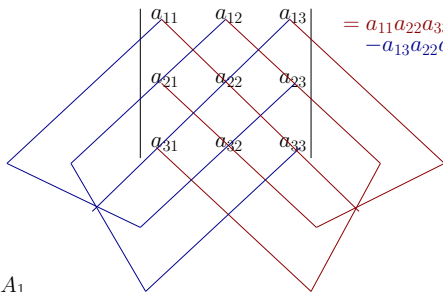
第一次学行列式的时候，碰到的两个问题：

- 什么是行列式？
- 行列式有什么用？

目 录

第 1 章 行列式	1
§ 1 二阶与三阶行列式	1
§ 2 全排列和对换	4
§ 3 n 阶行列式的定义	5
§ 4 行列式的性质	7
§ 5 行列式按行(列)展开	15
习题一	21
第 2 章 矩阵及其运算	24
§ 1 线性方程组和矩阵	24
§ 2 矩阵的运算	29
§ 3 逆矩阵	39
§ 4 克拉默法则	44
§ 5 矩阵分块法	46
习题二	52
第 3 章 矩阵的初等变换与线性方程组	56

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$


$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{(A)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^2 a_{11} A_{11} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} A_{1n}$$

\vdots

$$x_n = \frac{\det A_n}{\det A} = (-1)^2 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



但是



上海师范大学
Shanghai Normal University

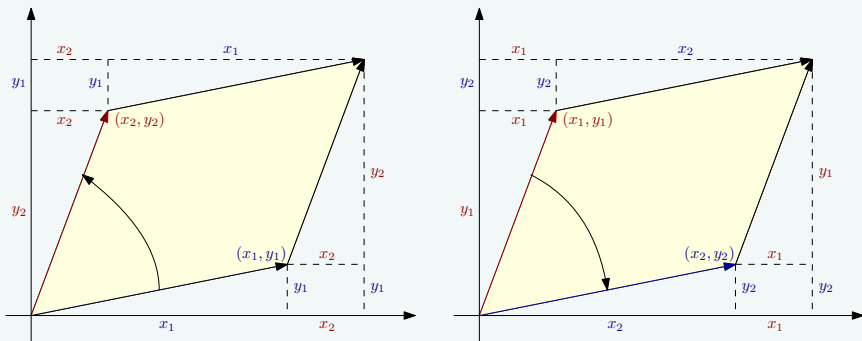
为什么？

行列式究竟想算什么？

我们以 2×2 的行列式为例如：

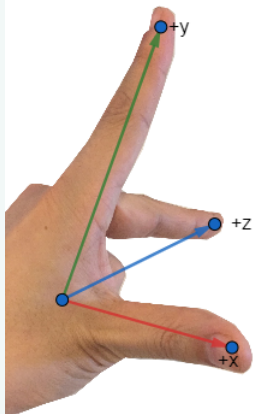
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

向量 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 围成的平行四边形的有向面积

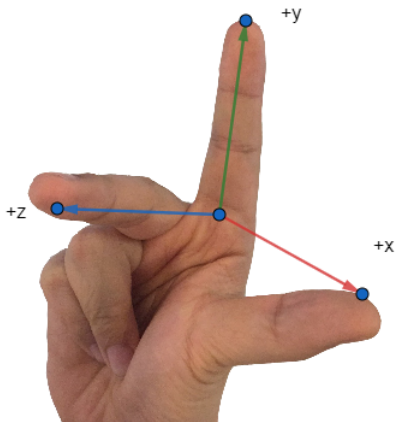


左手系 VS 右手系

左手坐标系



右手坐标系



n 维空间的有向体积

对于 n 维空间 n 个向量构成的多面体：

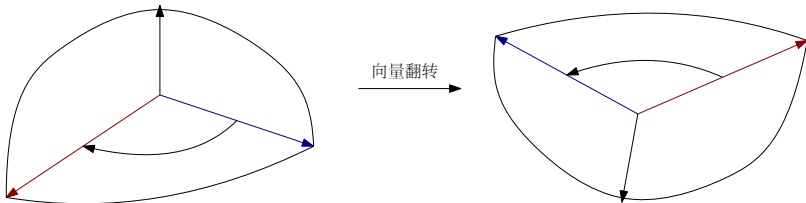
$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n$, 记其体积为 $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n)$

我们将其两个向量对换位置：

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n$, 记其体积为 $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)$

我们应当有：

$$D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)$$



行列式想求取的是：

在 n 维空间的 n 个向量张成的平行六面体 (n -dimensional parallelepiped) 的有向体积。

但行列式的值，存储了对应方阵的很多信息。

- (Pivot Formula), 我们将证明 $\det A$ 和 A 中所有首元的乘积的绝对值相同。
- (Big Formula), 我们将说明 $\det A$ 是 $n!$ 个不同元素组合之和。
- (Cofactor Expansion), 我们将证明 $\det A$ 是 A 中一些子行列式的线性组合。

从而我们可以得到很多矩阵的性质。

1. (Invertibility), A 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$ 。
2. (rank), A 的秩等于 A 的行列式的非零子式的个数。
3. (Cramer Rules), 我们可以用行列式来求解线性方程组。
4. (Eigenvalues), 这是我们接下来要讨论的内容。
5. ...

令 $A = [\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$ 是一个 $n \times n$ 的矩阵，方阵 A 的行列式 $\det(A)$ 是由 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ 在 n 维空间长成的平行六面体 (n -dimensional parallelepiped) 的有向体积。

我们希望通过其的基本性质最终给出行列式对应的值，即最终一步一步得到 $\det(A)$ 相当于关于 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ 的函数：

$$\det(A) = D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n)$$

► 行列式的性质

对于 \mathbb{R}^n 的如下 n 个向量:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$D(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) = 1$$

这也就是

- $\det(E) = 1$ 。

对于 n 个 \mathbb{R}^n 的向量

$$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$$

我们有:

$$D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots \mathbf{a}_n)$$

这也就是:

- 交换两列改变行列式的符号:

$$\det(\left[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_n \right]) = -\det(\left[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n \right])$$

行列式的值应当对于每列都是线性的:

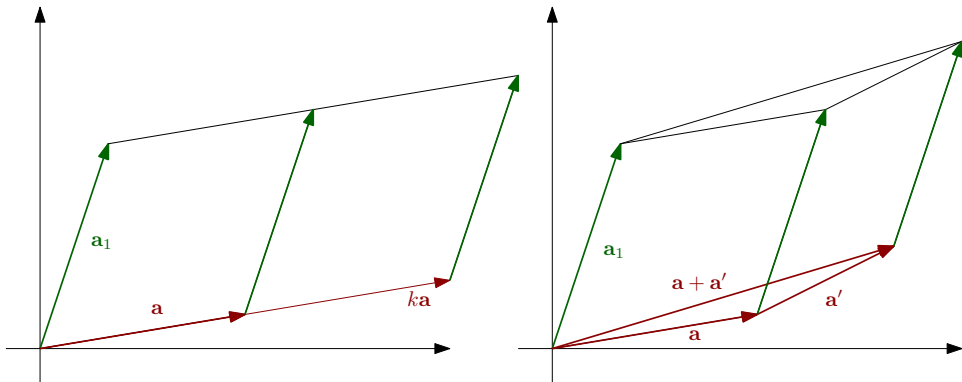
- $D(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) = cD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)$ 。
- $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) + D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n)$ 。

这也就是:

- 行列式的值对于每一列都是满足线性的:

$$\det(\left[\mathbf{a}_1 \cdots (c\mathbf{a}_i + d\mathbf{a}'_i) \cdots \mathbf{a}_n\right]) = c \det(\left[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_n\right]) + d \det(\left[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}'_i \cdots \mathbf{a}_n\right])$$

基本性质 (III) 在 2 维的几何解释



记 S_1 是 \mathbf{a}, \mathbf{a}_1 张成的平行四边形的有向面积, S_2 是 $k\mathbf{a}, \mathbf{a}_1$ 张成的平行四边形的有向面积, S_3 是 $\mathbf{a}', \mathbf{a}_1$ 张成的平行四边形的有向面积, S_4 是 $\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{a}_1$ 张成的平行四边形的有向面积, 则:

$$S_2 = kS_1$$

$$S_4 = S_1 + S_3$$

回顾我们目前所做的, 对于 n 维空间的 n 个向量 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, 我们希望定义一个函数 D , 满足下列性质:

- $D(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$
- $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n)$
- $D(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_i + d\mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n) = cD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) + dD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n)$

我们希望说明:

D 是存在的且唯一的

而这就是我们想要的行列式, 即:

$$\det(A) = \det([\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]) = D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

我们也会将其记作:

$$|A| \text{ 或者 } \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在接下来的内容中，我们将分不加区分的使用 $n \times n$ 的矩阵 A 和其 n 个对应的列向量 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ 。

定理 8.

- 如果 A 存在一个列向量是 $\mathbf{0}$ ，则 $\det(A) = 0$ 。
- 如果 A 存在两列向量相同，则 $\det(A) = 0$ 。
- 如果 A 存在一列是其他列的倍数，则 $\det(A) = 0$ 。

证明：不妨假设 A 的第一列是 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ ，则我们有：

$$D(\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) + D(\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

从而：

$$\det(A) = D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$$

证明:

- 如果 A 存在两列向量相同, 不妨记为 $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$, 则我们有:

$$D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n)$$

从而:

$$\det(A) = D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n) = 0$$

- 如果 A 存在一列是其他列的倍数, 不妨记为 $\mathbf{a}_i = c\mathbf{a}_j$, 则我们有:

$$\det(A) = D(\mathbf{a}_1, \cdots, c\mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) = cD(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) = 0$$

定理 9.

如果 $\text{rank}(A) < n$, 则 $\det(A) = 0$ 。

证明: 由 $\text{rank}(A) < n$ 可知 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ 是线性相关的, 即存在 $1 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$ 和 c_1, \dots, c_k 使得:

$$\mathbf{a}_{i_0} = c_1 \mathbf{a}_{i_1} + \dots + c_k \mathbf{a}_{i_k}$$

从而我们有:

$$\begin{aligned} \det(A) &= D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i_0}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= D(\mathbf{a}_1, \dots, c_1 \mathbf{a}_{i_1} + \dots + c_k \mathbf{a}_{i_k}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= \sum_{j=1}^k c_j D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i_j}, \dots, \mathbf{a}_{i_j}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

定理 10.

将矩阵的某些列的线性组合加到另一列上 (其他列不改变), 行列式的值保持不变。

证明: 利用:

$$\bullet \quad D(\mathbf{a}_1, \cdots, c\mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) = cD(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) = 0$$

可知:

$$D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n)$$

定理 11.

令 A 是一个 $n \times n$ 的对角矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A) = a_1 a_2 \cdots a_n$$

定理 12.

令 A 是一个 $n \times n$ 的三角矩阵 (triangular matrix):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{或者} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

- 行列式的几何意义。
- 行列式需要满足的基本性质。
- 由这些性质衍生的一些性质。

我们的目标

考虑一个 $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ 的函数 D ，其满足下列三个性质：

- $D(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$
- $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n)$
- $D(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_i + d\mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n) = cD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) + dD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n)$

我们希望说明，这样的函数 D 存在而且唯一，从而其就是对应的行列式 $\det(A)$ 。

为了证明这样的 D 存在且唯一，我们希望：

- 通过 D 的性质，我们尝试计算出对于任意的 $n \times n$ 的矩阵 A ，其对应的函数值。
- 如果对于每个 $n \times n$ 的矩阵 A ，我们都能计算出一个唯一的函数值，那么我们就可以说明 D 是存在且唯一的。

► 行列式的计算



令 $i, j \in [n]$, 我们将第 j 列的 l 倍加到第 i 列上, 我们有:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + la_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + la_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = \det(A)$$



令 $i, j \in [n]$, 我们将第 j 列和第 i 列互换, 我们有:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = -\det(A)$$



令 $i \in [n]$ 和 $l \in \mathbb{R}$, 我们将第 i 列乘以 l 倍, 我们有:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & la_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & la_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = l \det(A)$$

计算任意 $n \times n$ 矩阵的行列式的值

计算行列式 A 的值

1. 我们对 A 进行初等列变换，或者等价地说，对 A^T 进行初等行变换。最终我们可以得到一个 A^T 的行阶梯形 R 。从而 R^T 是一个下三角矩阵。令其对角线的元素为 d_1, \dots, d_n ，则我们有：

$$\det(R^T) = d_1 \cdots d_n$$

2. 我们根据 A 变成 R^T 的过程，注意到这个过程中得每一步都是列变换，从而根据前面得结论一步步反推得到 $\det(A)$ 的值。

定理 13.

$\text{rank}(A) = n$ 当且仅当 $\det(A) \neq 0$ 。

考察 2×2 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d - \frac{cb}{a} \end{bmatrix}$$

从而:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d - \frac{cb}{a} \end{vmatrix} = a \cdot (d - \frac{cb}{a}) = ad - bc$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -4 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 8 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 8 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则我们有:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot \frac{1}{2} = -4$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 5 & -\frac{5}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & -\frac{9}{10} \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & 0 \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而:

$$\det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & 0 \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) \cdot 0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a - \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

从而:

$$\det \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a - \frac{1}{a} \end{vmatrix} = a^{n-1} \left(a - \frac{1}{a} \right) = a^n - a^{n-2}$$

回顾一下我们对 $\det A$ 的计算:

1. 根据我们的理解, $\det A$ 如果存在, 一定要满足三条基本性质。
2. 我们推得了关于 $\det A$ 的一些其他性质。
3. 通过上述的讨论, 我们知道了初等列变换对 $\det A$ 的影响。
4. 而通过初等列变换, 我们可以将 A 转变成一个下三角矩阵 L 。
5. 我们知道 $\det(L)$ 是多少, 从而根据 3 和 4, 我们可以从 $\det L$ 得到 $\det(A)$ 的值。

上述的过程说明了 $\det A$ 的存在性

- 我们描绘了行列式想计算的内容

在 n 维空间的 n 个向量张成的平行六面体 (n -dimensional parallelepiped) 的有向体积

- 由此出发, 我们假定了 $\det(A)$ 该满足的三条性质

1. $D(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$

2. $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n)$

3. $D(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_i + d\mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n) = cD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) + dD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n)$

- 我们通过这三条性质推导了一些其他性质。
- 我们通过初等列变换, 将 A 转变成一个下三角矩阵 L , 从而得到了 $\det(A)$ 的值。这一构造过程, 说明了 $\det(A)$ 的存在性。