



上海师范大学
Shanghai Normal University

《线性代数》

11-行列式 (II)(Determinants(II))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025 年 5 月 5 日

复习：行列式的几何解释

令 $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ 是一个 $n \times n$ 的矩阵，方阵 A 的行列式 $\det(A)$ 是由 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ 在 n 维空间长成的平行六面体 (n -dimensional parallelepiped) 的有向体积。

我们希望通过其的基本性质最终给出行列式对应的值，即最终一步一步得到 $\det(A)$ 相当于关于 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ 的函数：

$$\det(A) = D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n)$$

复习：行列式的基本性质

- $D(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$
- $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)$
- $D(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_i + d\mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n) = cD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) + dD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n)$

定理 1.

- 如果 A 存在一个列向量是 $\mathbf{0}$, 则 $\det(A) = 0$ 。
- 如果 A 存在两列向量相同, 则 $\det(A) = 0$ 。
- 如果 A 存在一列是其他列的倍数, 则 $\det(A) = 0$ 。

定理 2.

如果 $\text{rank}(A) < n$, 则 $\det(A) = 0$ 。

定理 3.

将矩阵的某些列的线性组合加到另一列上 (其他列不改变), 行列式的值保持不变。

定理 4.

令 A 是一个 $n \times n$ 的三角矩阵 (triangular matrix):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{或者} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

复习：列变换对行列式值的影响 (I)

令 $i, j \in [n]$, 我们将第 j 列的 l 倍加到第 i 列上, 我们有:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + la_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + la_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = \det(A)$$

复习：列变换对行列式值的影响 (II)

令 $i, j \in [n]$, 我们将第 j 列和第 i 列互换, 我们有:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = -\det(A)$$

复习：列变换对行列式值的影响 (III)

令 $i \in [n]$ 和 $l \in \mathbb{R}$, 我们将第 i 列乘以 l 倍, 我们有:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & la_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & la_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = l \det(A)$$

计算行列式 A 的值

1. 我们对 A 进行初等列变换，或者等价地说，对 A^T 进行初等行变换。最终我们可以得到一个 A^T 的行阶梯形 R 。从而 R^T 是一个下三角矩阵。令其对角线的元素为 $d_1, \dots, d_n$ ，则我们有：

$$\det(R^T) = d_1 \cdots d_n$$

2. 我们根据 A 变成 R^T 的过程，注意到这个过程中得每一步都是列变换，从而根据前面得结论一步步反推得到 $\det(A)$ 的值。

定理 5.

$\text{rank}(A) = n$ 当且仅当 $\det(A) \neq 0$ 。

通过一步步构造 $\det A$ 的方式，我们给出了 $\det A$ 的存在性。



- › 行列式更多的性质
- › 行列式的正式定义
- › 行列式的展开

► 行列式更多的性质

我们将证明：

定理 6

[Transpose].

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，我们有：

$$\det(A) = \det(A^T)$$

定理 7

[Product of Determinants].

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵， B 是一个 $n \times n$ 的矩阵，我们有：

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

这也说明，对矩阵的初等行变换对行列式的影响跟初等列变换是完全相同的

推论 8.

给定一个正交矩阵 Q , 我们有:

$$\det(Q) = \pm 1$$

这说明, 在 $\mathbb{R}^n$ 中由 n 个标准正交 (orthonormal) 基向量构成的平行六面体的体积是 1。证明: 注意到:

$$Q^T Q = E$$

从而我们有:

$$1 = \det(E) = \det(Q) \det(Q^T) = \det(Q) \det(Q) = (\det(Q))^2 \implies \det(Q) = \pm 1$$

引理 9.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, E 是一个 $n \times n$ 的初等矩阵, 则我们有:

$$\det(AE) = \det(A) \det(E)$$

推论 10.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, $E_1, \dots, E_k$ 是 $n \times n$ 的初等矩阵, 则我们有:

$$\det(AE_1E_2 \cdots E_k) = \det(A) \det(E_1) \det(E_2) \cdots \det(E_k)$$

特别的:

$$\det(E_1E_2 \cdots E_k) = \det(E_1) \det(E_2) \cdots \det(E_k)$$

注意到 E 是下列三种矩阵的一种:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & k & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$E_{ij}(k)$ P_{ij} $D_i(k)$

注意到 AE 是对 A 进行相应的列变换操作, 所以我们只需要检查每种初等矩阵是否满足 $\det(AE) = \det(A) \det(E)$ 即可。

引理9的证明- $E_{ij}(k)$ 的情况

令 $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$, 注意到:

$$AE_{ij}(k) = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + k\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n]$$

从而我们有:

$$\det(E_{ij}(k)) = \det(E) = 1$$

$$\begin{aligned}\det(AE_{ij}(k)) &= D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + k\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) + kD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= \det(A)\end{aligned}$$

即:

$$\det(AE_{ij}(k)) = \det(A) \det(E_{ij}(k))$$

令 $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$, 注意到:

$$AP_{ij} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n]$$

从而我们有:

$$\det(P_{ij}) = -\det(I) = -1$$

$$\begin{aligned}\det(AP_{ij}) &= D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= -D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= -\det(A)\end{aligned}$$

即:

$$\det(AP_{ij}) = \det(A) \det(P_{ij})$$

令 $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$, 注意到:

$$AD_i(k) = [\mathbf{a}_1, \dots, k\mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n]$$

从而我们有:

$$\begin{aligned}\det(D_i(k)) &= k \det(E) = k \\ \det(AD_i(k)) &= D(\mathbf{a}_1, \dots, k\mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= kD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= k \det(A)\end{aligned}$$

即:

$$\det(AD_i(k)) = \det(A) \det(D_i(k))$$

回顾 Gauss–Jordan 消元法:

$$D \cdots E_{ij} \cdots P \cdots E_{ij} \begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & A^{-1} \end{bmatrix}$$

我们有:

定理 11.

每个可逆矩阵都可以由一系列的初等矩阵的乘积得到。

定理 6

[Transpose].

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 我们有:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

证明:

1. 对于每个初等矩阵 E_{ij} , 我们有 $\det(E_{ij}) = \det(E_{ij}^T)$ 。
2. 如果 A 不是可逆的, 则 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) < n$, 从而

$$\det(A) = \det(A^T) = 0$$

3. 如果 A 是可逆的, 则存在一系列的初等矩阵 $E_1, \dots, E_l$ 使得:

$$A = E_1 \cdots E_l$$

从而 $A^T = E_l^T \cdots E_1^T$, 因此:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(E_1) \cdots \det(E_l) \\ &= \det(E_1^T) \cdots \det(E_l^T) = \det(E_l^T) \cdots \det(E_1^T) = \det(E_l^T \cdots E_1^T) = \det(A^T) \end{aligned}$$

我们现在来证明:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

证明: 如果 B 是可逆的, 则存在一系列的初等矩阵 $E_1, \dots, E_k$ 使得:

$$B = E_1 \cdots E_k$$

从而:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(AE_1 \cdots E_k) = \det(A) \det(E_1) \cdots \det(E_k) \\ &= \det(A) \det(E_1 \cdots E_k) = \det(A) \det(B) \end{aligned}$$

如果 B 不是可逆的, 则 AB 也不可逆, 否则:

$$E = (AB)^{-1}AB = ((AB)^{-1}A)B$$

所以此时我们有:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) = 0$$

一个运用-Cramer 法则 (I)

我们来展示 $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ 的一个运用。考察下列的方程组：

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \quad \text{即} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{记作 } A\mathbf{x} = \mathbf{b})$$

注意到：

$$A \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{x} & A\mathbf{e}_2 & A\mathbf{e}_3 & \cdots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

一个运用-Cramer 法则 (II)

记下列矩阵为 A_1 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b_1} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \mathbf{b_2} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b_n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

注意到:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = x_1$$

则我们有:

$$\det(A)x_1 = \det(A_1), \quad \text{即: } x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

一个运用-Cramer 法则 (III)

对于任意的 $i \in [n]$, 令 A_i 是将 A 的第 i 列替换成 $\mathbf{b}$ 后的矩阵, 则我们有:

$$A \begin{bmatrix} 1 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & x_n & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [A\mathbf{e}_1 \cdots A\mathbf{x} \cdots A\mathbf{e}_n] = A_i \implies \det(A)x_i = \det(A_i)$$

从而方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解可以表示为:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\det(A_n)}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

这就是克拉默法则 (Cramer's Rule)

另一个应用- $\det(A)$ 跟首元的关系

令可逆矩阵 A 的首元为 $p_1, \dots, p_n$, 通过 Gauss 消元法我们可以将矩阵 A 变为如下的行阶梯矩阵:

$$U = \begin{bmatrix} p_1 & * & \cdots & * \\ 0 & p_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}$$

由于上述过程只使用了行加法和行交换操作 (列加法或者列交换), 从而我们有:

$$\det(A) = \det(U) = p_1 p_2 \cdots p_n \text{ 或者 } \det(A) = -\det(U) = -p_1 p_2 \cdots p_n$$

即:

$$|\det(A)| = |p_1 p_2 \cdots p_n|$$

► 行列式的正式定义

考虑一个 $n \times n$ 的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

注意到其每个列向量:

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = a_{1j} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{nj} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_i$$

从而由行列式的线性性, 我们有:

$$D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n) = D\left(\sum_{i=1}^n a_{i1} \mathbf{e}_i, \cdots, \mathbf{a}_n\right) = \sum_{i=1}^n a_{i1} D(\mathbf{e}_i, \cdots, \mathbf{a}_n)$$

如果我们将矩阵的每一列都按上述方式展开，则：

$$D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} D(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n})$$

上述等式一共有 n^n 项。由行列式的性质，如果存在 $i_k = i_j$ ，则我们有：

$$D(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}, \dots, \mathbf{e}_{i_j}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) = 0$$

从而上述等式可以转化为：

$$D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \sum_{\substack{i_1 \in [n] \\ i_2 \neq i_1}} \sum_{\substack{i_2 \in [n] \\ i_2 \neq i_1}} \cdots \sum_{\substack{i_n \in [n] \\ i_n \neq i_1, \dots, i_n \neq i_{n-1}}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} D(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n})$$

我们来观察一下这个式子:

$$D(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\substack{i_1 \in [n] \\ i_2 \in [n] \\ i_2 \neq i_1}} \cdots \sum_{\substack{i_n \in [n] \\ i_n \neq i_1, \dots, i_n \neq i_{n-1}}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} D(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$$

事实上, $i_1, \dots, i_n$ 是 $1, \dots, n$ 的一个置换。

例 7.

- $1, 3, 2, 4$ 就是 $1, 2, 3, 4$ 的一个置换。
- c, d, e, a, b 是 a, b, c, d, e 的一个置换。

定义 8

[Permutation].

固定一个 $n \in \mathbb{N}$, 一个 $[n]$ 的置换 (Permutation) 是一个 $[n] \rightarrow [n]$ 的**双射函数 (bijective function)** σ , 并且我们定义:

$$\text{Perm}(n) = \{\sigma \mid \sigma \text{ 是 } [n] \text{ 的一个置换。}\}$$

从而我们可以将上述表达式改写为:

$$\begin{aligned} D(a_1, \dots, a_n) &= \sum_{\substack{i_1 \in [n] \\ i_2 \in [n] \\ i_2 \neq i_1}} \cdots \sum_{\substack{i_n \in [n] \\ i_n \neq i_1, \dots, i_n \neq i_{n-1}}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} D(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Perm}(n)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} D(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$



我们需要搞清楚 $D(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)})$ 是什么，注意到：

$$P = [\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}]$$

是一个置换矩阵。

1. P 可以通过若干次列交换操作变成单位矩阵 E 。
2. 每次列交换操作改变其行列式的符号。
3. 从而 $\det(P) = (-1)^k$ ，这里 k 是列交换的次数。

注意！

这里的 k 是不唯一的！

1. 我们希望定义 $\det A$ 来表示：由 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ 在 n 维空间长成的平行六面体 (n -dimensional parallelepiped) 的有向体积。
2. 我们发现 $\det A$ 需要满足三个基本的性质：
 - $D(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$
 - $D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n)$
 - $D(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_i + d\mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n) = cD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) + dD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_i, \dots, \mathbf{a}_n)$
3. 通过这三个基本的性质，我们计算出了行列式的表达：

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma \in \text{Perm}(n)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} D(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Perm}(n)} (-1)^{k_\sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}\end{aligned}$$

这里 k_σ 是置换矩阵 $[\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}]$ 变成单位矩阵 E 所需要的列交换的次数。但我们还面临一个问题：

k_σ 并不唯一，所以我们不能用上述式子作为 $\det(A)$ 的定义。

令 $\sigma: [n] \rightarrow [n]$ 是一个置换，我们用如下的方式进行简写：

$$\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$$

比如，我们称：

4213就是 1234 的一个置换。

观察这些置换的特点：

- 其中存在在前面但是更大的数，比如在 4213 中，4 在 2 前面，但是 $4 > 2$ 。

我们称这样的一堆数为逆序对，而一个置换中的逆序对的个数为这个置换的逆序数
(Inversion Number)

定义 9

[Inversion numbers].

给定一个置换 $\sigma = \sigma(1)\sigma(2) \cdots \sigma(n)$, 其逆序数 (Inversion number) $\tau(\sigma)$ 定义为:

$$\tau(\sigma) = |\{(p, q) \mid 1 \leq p < q \leq n \text{ 并且 } \sigma(p) > \sigma(q)\}|$$

例 10.

- $\tau(4213) = 4.$
- $\tau(1324) = 1$
- $\tau(3241) = 3.$

逆序数-变成单位矩阵的次数! (I)



上海师范大学
Shanghai Normal University

观察到:

$$\tau(4213) = 4 \implies 4213 \rightarrow 2413 \rightarrow 2143 \rightarrow 2134 \rightarrow 1234$$

$$\tau(1324) = 1 \implies 1324 \rightarrow 1234$$

$$\tau(3241) = 3 \implies 3214 \rightarrow 2314 \rightarrow 2134 \rightarrow 1234$$

逆序数恰好可以作为一个将置换 $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ 变回 $123\cdots n$ 的个数!

定理 11.

给定置换矩阵

$$P = \left[\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathbf{e}_{\sigma(n)} \right]$$

我们可以通过 $\tau(\sigma)$ 次列交换将其变回单位矩阵 E 。

这意味着我们可以用 $\tau(\sigma)$ 来定义 k_σ !

逆序数-变成单位矩阵的次数! (II)

证明: [定理11的证明] 注意到对于一个置换 σ , 我们有:

$$\tau(\sigma) = \sum_{i=1}^n |\{t \mid t > i \text{ 并且 } \sigma(i) > \sigma(t)\}|$$

从而对于置换矩阵我们可以定义如下的列交换操作, 初始令 $k = n$:

1. 不妨令 $k = \sigma(t)$, 令 $t_1 < t_2 < \cdots < t_j$ 是满足 $k > \sigma(t_i)$ 的位置。依次将第 k 列与第 t_i 列进行交换, 共交换 j 次。
2. 令 $k = k - 1$, 重复上述过程。

注意到上述列交换的总数恰好是置换 σ 的逆序数 (为什么?), 从而定理得证。

现在我们就可以得到行列式的正式定义了。

定义 12.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 我们定义:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \text{Perm}(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

定理 13.

$\det(A)$ 满足下列性质:

- $D(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) = 1$
- $D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n)$
- $D(\mathbf{a}_1, \cdots, c\mathbf{a}_i + d\mathbf{a}'_i, \cdots, \mathbf{a}_n) = cD(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n) + dD(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}'_i, \cdots, \mathbf{a}_n)$

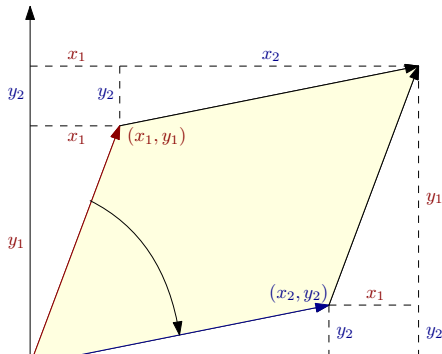
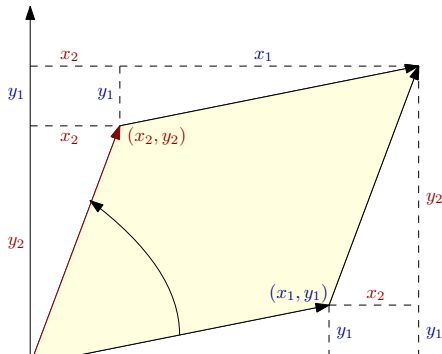
例子- 2×2 的情况

对于一个 2×2 的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

一共有 12, 21 两种不同的置换, 从而我们有:

$$\det(A) = (-1)^{\tau(12)} x_1 y_2 + (-1)^{\tau(21)} x_2 y_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$



例子- 3×3 的情况 (I)

对于一个 3×3 的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

其一共有 123, 132, 213, 231, 312, 321 六种不同的置换, 并且:

$$\tau(123) = 0, \tau(132) = 1, \tau(213) = 1, \tau(231) = 2, \tau(312) = 2, \tau(321) = 3$$

从而我们有:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{\tau(123)} a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^{\tau(132)} a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^{\tau(213)} a_{12} a_{21} a_{33} \\ &\quad + (-1)^{\tau(231)} a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^{\tau(312)} a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^{\tau(321)} a_{13} a_{22} a_{31} \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

例子- 3×3 的情况 (II)



这也就是书本中常见的三阶行列式计算的记忆方式：

The diagram shows a 3×3 matrix with elements a_{ij} . Blue lines connect $a_{11} \rightarrow a_{22} \rightarrow a_{33}$ and $a_{12} \rightarrow a_{23} \rightarrow a_{31}$, representing even permutations. Red lines connect $a_{13} \rightarrow a_{21} \rightarrow a_{32}$ and $a_{11} \rightarrow a_{23} \rightarrow a_{32}$ (note: the original image has a typo in the red loop description, it should be $a_{11} \rightarrow a_{23} \rightarrow a_{31}$ for the permutation (123)), representing odd permutations. The resulting formula is:

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

定理 14

[Uniqueness].

$\det(A)$ 是**唯一**一个 $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n \uparrow} \rightarrow \mathbb{R}$ 的函数满足下述三个性质:

- $D(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) = 1$
- $D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n)$
- $D(\mathbf{a}_1, \cdots, c\mathbf{a}_i + d\mathbf{a}'_i, \cdots, \mathbf{a}_n) = cD(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_n) + dD(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}'_i, \cdots, \mathbf{a}_n)$

证明: 我们前面已经证明, 满足这三个性质的函数具备如下的性质:

$$D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n) = \sum_{\sigma \in \text{Perm}(n)} (-1)^{k_\sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

根据前面的讨论, k_σ 可以用 $\tau(\sigma)$ 来替代, 从而:

$$D(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n) = \sum_{\sigma \in \text{Perm}(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \det(A)$$

这就完成了唯一性的证明。

► 行列式的展开

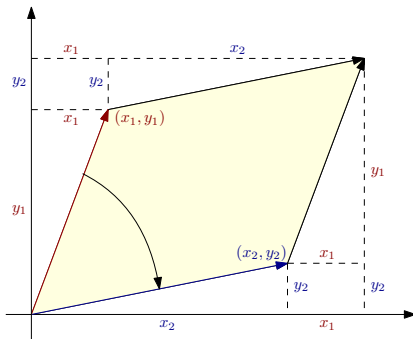
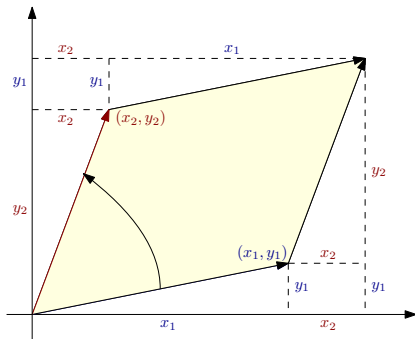
回顾 2×2 的行列式

对于一个 2×2 的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

一共有 12, 21 两种不同的置换, 从而我们有:

$$\det(A) = (-1)^{\tau(12)}x_1y_2 + (-1)^{\tau(21)}x_2y_1 = x_1y_2 - x_2y_1$$



这可以看成是 $\det(A)$ 代数余子式展开 (Cofactor Expansion) 的一个特殊情况。

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 并且 $n \geq 2$ 。对于任意的 $i, j \in [n]$, 我们定义:

M_{ij} 是将 A 第 i 行第 j 列的元素删去后得到的 $n-1 \times n-1$ 的矩阵。

定义 15

[Cofactor].

下列数:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

称之为代数余子式 (Cofactor), 特别的 $\det(M_{ij})$ 称之为余子式。

定理 16.

1. $\det([a]) = a$.
2. 对于任意的 $n \geq 2$, 并且 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

定理16的证明 (I)

我们对其第一列展开:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所以我们只需要证明, 对任意的 $i \in [n]$ 有:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} C_{i1} = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(M_{i1}) = (-1)^{i-1} a_{i1} \det(M_{i1})$$

定理16的证明 (II)



对其第 i 行向上交换 $i-1$ 次可得:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所以我们只要证明:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \det(M_{i1})$$

通过行列式的性质，我们注意到：

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1} & O_{1 \times (n-1)} \\ O_{(n-1) \times 1} & M_{i1} \end{vmatrix}$$

也就是要证明：

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & O_{1 \times (n-1)} \\ O_{(n-1) \times 1} & M_{i1} \end{vmatrix} = a \det(M_{i1})$$

引理 17.

我们有: $\det(A) = \begin{vmatrix} a & O \\ O & B \end{vmatrix} = a \det(B)$

证明:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a & O \\ O & B \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \text{Perm}(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \text{Perm}(n) \\ \sigma(1)=1}} (-1)^{\tau(\sigma)} a a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= a \sum_{\substack{\sigma \in \text{Perm}(n) \\ \sigma(1)=1}} (-1)^{\tau(\sigma)} b_{\sigma(2)-1,1} \cdots b_{\sigma(n)-1,n} \\ &= a \sum_{\delta \in \text{Perm}(n-1)} (-1)^{\tau(\delta)} b_{\delta(1),1} \cdots b_{\delta(n-1),n-1} = a \det(B) \end{aligned}$$

定理 18.

1. $\det([a]) = a$.
2. 对于任意的 $n \geq 2$, 并且 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\det(A) = a_{1i}C_{1i} + \cdots + a_{ni}C_{ni}$$

思路

只需要将第 j 列做 $j-1$ 次列交换换到第 1 列即可。

证明: [定理18的证明] 通过 $i-1$ 次列交换, 我们可以将第 i 列逐步换到第 1 列, 即:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

从而:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i-1} (a_{1i} C'_{11} + a_{2i} C'_{12} + \cdots + a_{ni} C'_{1n}) \\ &= (-1)^{i-1} (a_{1i} (-1)^{1+1} \det(M_{1i}) + a_{2i} (-1)^{2+1} \det(M_{2i}) + \cdots + a_{ni} (-1)^{n+1} \det(M_{ni})) \\ &= (-1)^{1+i} a_{1i} \det(M_{1i}) + (-1)^{2+i} a_{2i} \det(M_{2i}) + \cdots + (-1)^{n+i} a_{ni} \det(M_{ni}) \\ &= a_{1i} C_{1i} + \cdots + a_{ni} C_{ni} \end{aligned}$$

定理 19.

1. $\det(\begin{bmatrix} \mathbf{a} \end{bmatrix}) = a$.
2. 对于任意的 $n \geq 2$, 并且 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

证明: 只要注意到 $\det(A) = \det(A^T)$ 即可。

计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

证明: 我们根据其第一列展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 24 - 12 - 8 - 6 = -2$$

我们也可以按第二列进行展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & \color{red}{1} & 1 & 1 \\ 1 & \color{red}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \color{red}{0} & 3 & 0 \\ 1 & \color{red}{0} & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \color{red}{1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \color{red}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 2 * 5 = -2$$

也可以选择按第二行展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \color{red}{1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \color{red}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 2 * 5 = -2$$

记下列的矩阵为 D_n :

$$D_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

计算 $\det(D_n)$

证明：我们按第一行展开：

$$\begin{aligned}
 \det(D_n) &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)(-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \det(D_{n-1}) - \det(D_{n-2})
 \end{aligned}$$

我们有:

$$\det(D_n) = 2 \det(D_{n-1}) - \det(D_{n-2})$$

注意到:

$$\det(D_1) = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \det(D_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

我们可以根据上述递推式得到:

$$\det(D_n) = n + 1$$



下列是 Vandermonde 矩阵:

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

证明其行列式值为:

$$\det(V_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_j - x_i)$$

证明: 我们通过归纳法来计算 $\det(V_n)$ 。

- $n = 2$ 时, 我们有:

$$\det(V_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

考虑 n 的时候, 我们的策略是先用行变换将第一列除了第一个元素全部变为 0, 再将行列式按第一列展开, 即:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n - x_1) \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n - x_1) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$\det(V_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

由归纳假设我们有:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \leq j \leq i \leq n} (x_j - x_i)$$

从而我们有:

$$\det(V_n) = (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \prod_{2 \leq j \leq i \leq n} (x_j - x_i) = \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} (x_j - x_i)$$



我们已经阐述了克拉默法则 (Cramer's Rule) 在解方程中的作用。现在让我们来用它解决一下 A^{-1} 。注意到 $A^{-1} = [x_1 \cdots x_n]$ 等价于如下 n 个方程组：

$$Ax_1 = e_1, Ax_2 = e_2, \cdots, Ax_n = e_n$$

特别的：

$$Ax_1 = A \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而，通过 Cramer's Rule 我们有对任意的 $i \in [n]$ ：

$$x_{i1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & 1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & 0 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{C_{1i}}{\det(A)}$$

更一般的来说, 对于 $j \in [n]$

$$Ax_j = A \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

同样通过 Cramer's Rule 我们有对任意的 $i \in [n]$:

$$x_{ij} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{j,i-1} & 1 & a_{j,i+1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{C_{ji}}{\det(A)}$$

从而我们有:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & \mathbf{C_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C_{1n}} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

定义 20

称下列矩阵:

$$A^* = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & \mathbf{C_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C_{1n}} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵 (Adjugate Matrix)。

[Adjugate Matrix].

定理 21.

$$AA^* = \det(A)E$$

- 转置矩阵、矩阵乘法和行列式的关系。
 - $\det(A) = \det(A^T)$, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
 - 行列式跟首元的关系:

$$\det(A) = \det(U) = p_1 p_2 \cdots p_n \text{ 或者 } \det(A) = -\det(U) = -p_1 p_2 \cdots p_n$$

- 行列式的正式定义, The Big Formula:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \text{Perm}(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

- 代数余子式, 行列式按行 (列) 展开:

$$\det(A) = a_{1i} C_{1i} + \cdots + a_{1i} C_{1i}$$

- Cramer's Rule, 用行列式解方程, 求矩阵的逆, 伴随矩阵。