上海师范大学 Shanghai Normal University

《线性代数》

16-复习 (Review)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025 年 6 月 5 日

主要内容

- 课程总结
- 考试内容

课程总结

目录 I

目录 II

上海师范大学 Shanghai Normal University

目录 III

上海师范大学
Shanghai Normal University

Shanghai Normal University

目录 IV

Shanghai Normal University

- 对称矩阵和正定矩阵 (Symmetric Matrices and Positive Definite Matrices)
  - 对称矩阵
  - 正定矩阵
  - 特征空间、代数重数以及几何重数
- 线性变换 (Linear Transformation)
  - 线性变换的概念
  - 线性变换的矩阵形式
  - 线性变换的像和核
  - 对偶性 (Duality)
- 奇异值分解 (Singular Value Decomposition)
  - SVD 基础
  - 用线来拟合数据
  - 用 k 维子空间拟合数据
  - 再看 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的近似解

考虑如下的函数:

$$f(x) := 3x$$

这是一个 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的**线性函数**。

- 从几何的角度来讲，这是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的一条线。
- 从代数的角度来讲，对于任意的 $x_1, x_2, c, x \in \mathbb{R}$ 我们有:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= f(x_1) + f(x_2) \\ f(cx) &= cf(x) \end{aligned}$$

线性方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\quad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

线性方程组

1. 线性方程组的表示-利用矩阵。
2. 解线性方程组：Gauss—Jordan 消元法，矩阵 LU 分解。
3. 特殊的线性方程组-n 个未知数 n 个方程的情况。
4. 一般方程组的解的情况-$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 和 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵

1. 矩阵的基本概念、运算、分块矩阵。
2. 一些特殊的矩阵-逆矩阵、转置矩阵、置换矩阵、初等矩阵等。
3. 矩阵表示的四个向量空间。
4. 矩阵的列秩、行秩和秩。

空间 $\mathbb{R}^n$ 包含了所有如下的 n 维列向量 $\boldsymbol{v}$:

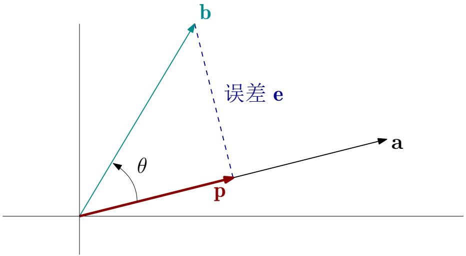
$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

其中对于任意的 $i \in [n]$，$v_i \in \mathbb{R}$，这里的 $\mathbb{R}$ 是实数集。

向量空间

1. 一般向量空间的定义。
2. 子空间的概念。
3. 线性相关的概念。
4. 向量空间的基和维度。

上海师范大学 Shanghai Normal University



正交和投影

1. 正交的概念：内积为 0。
2. 向量空间的正交、正交补。
3. 投影，最小二乘法-求 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ 的最佳近似解。
4. 标准正交基和 Gram–Schmidt 正交化，正交矩阵 (QR 分解)。

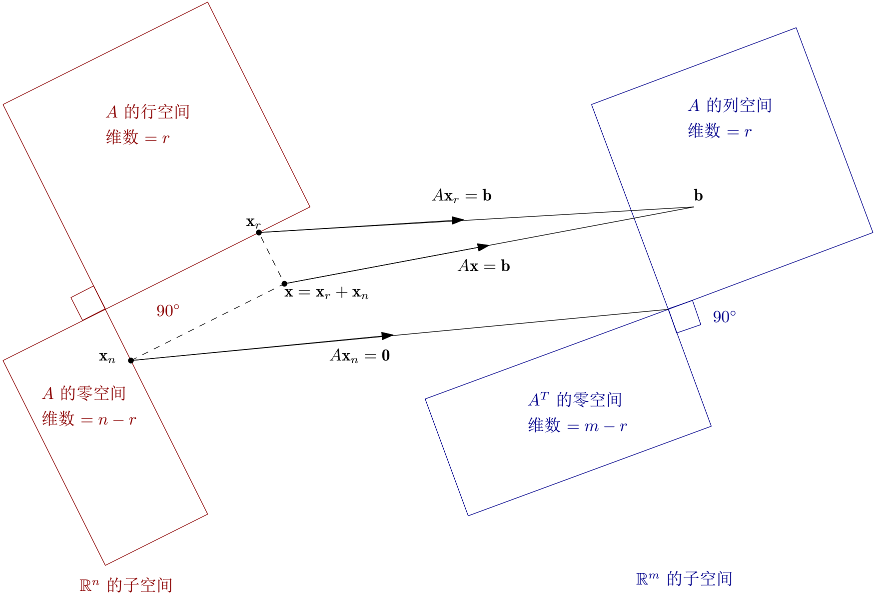
定理 1 [Fundamental Theorem of Linear Algebra].

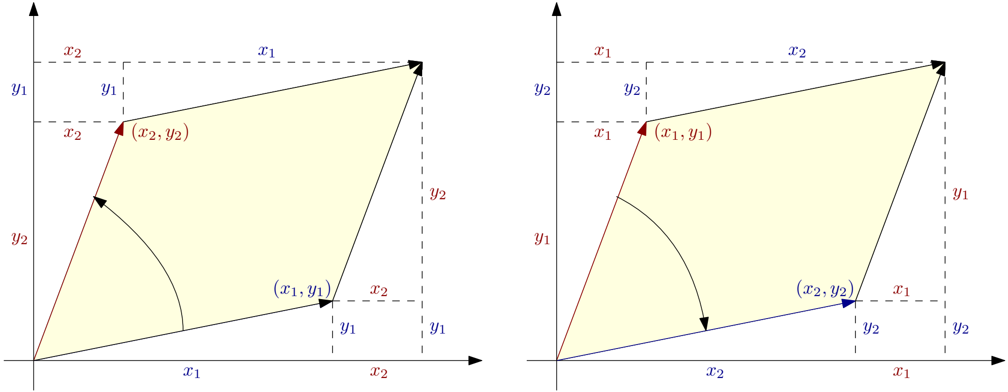
令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵并且 rank$(A) = r$，则:

1. $\dim(\mathbf{C}(A)) = \dim(\mathbf{C}(A^\top)) = r$.
2. $\dim(\mathbf{N}(A)) = n - r$, $\dim(\mathbf{N}(A^\top)) = m - r$。
3. $\mathbf{N}(A) = (\mathbf{C}(A^\top))^\perp$.
4. $\mathbf{N}(A^\top) = (\mathbf{C}(A))^\perp$。

线性代数基本定理-图示

$m \times n$ 的矩阵 A 的四个空间





行列式的目标

令 $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ 是一个 $n \times n$ 的矩阵，方阵 A 的行列式 $\det(A)$是由 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ 在 n 维空间长成的平行六面体 (n-dimensional parallelepiped) 的有向体积。

1. 行列式的计算-利用初等变换。
2. 行列式跟首元的关系:

$$\det(A) = \det(U) = p_1 p_2 \cdots p_n \text{ 或者 } \det(A) = -\det(U) = -p_1 p_2 \cdots p_n$$

3. 行列式的正式定义，The Big Formula:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in Perm(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

4. 代数余子式，行列式按行 (列) 展开:

$$\det(A) = a_{1i} C_{1i} + \cdots + a_{1i} C_{1i}$$

5. 一个应用：Cramer's Rule，用行列式解方程，求矩阵的逆，伴随矩阵。

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ 和非零 } \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \implies A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

特征值和特征向量

1. 特征值和特征向量的概念。
2. 矩阵的对角化。
3. 实对称矩阵的特征值、特征向量，对角化。
4. 正定矩阵。

还有更多 . . .

- 特征空间、代数重数、几何重数。
- 线性变换的概念、线性变换的矩阵形式、线性变换的像与核，对偶性。
- 奇异值分解 (Singular Value Decomposition).
- . . .

课程目标

1. 从强调计算（算术）到理解数学结构的转变。
2. 从牢记结论到掌握证明的转变。
3. 建立抽象的几何直观。

考试内容

考试概况

考试安排 (**以系统显示为准。**)

- 考试地点：**2 教楼 221，2 教楼 303**
- 考试时间：**2024 年 6 月 13 日 (周五) 8:30-10:00**，共 90 分钟。

试卷构成

$$\text{试卷} = 30\text{ 分选择题} + 10\text{ 分填空题} + 60\text{ 分综合题}$$

1. 选择题一共 10 道，每道 3 分，共 30 分。
2. 填空题一共 5 道，每道 2 分，共 10 分。
3. 综合题一共 6 道，前 3 道每道 8 分，后 3 道每道 12 分，共 60 分，其中会有一道关于矩阵运算的证明题。

关于考试

1. **不允许使用计算器**。
2. 务必要带好**学生证**供监考老师检查!

问题 2.

1. 令 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 满足 $\det(A) = 6$，则 $\begin{vmatrix} a_{12} & 3a_{11} - a_{13} & 2a_{13} \\ a_{22} & 3a_{21} - a_{23} & 2a_{23} \\ a_{32} & 3a_{31} - a_{33} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ =(　)

   (A) 36　(B) 36　(C) -12　(D) 12

2. 令 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-2, 1, 3$，则下列矩阵中行列式值为 0 的是 (　)

   (A) $A + E$　　(B) $A - 2E$

   (C) $A + 3E$　　(D) $A + 2E$

3. 设 3 元非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 两个解为 $\eta_1 = (0, 1, 2)^T$，$\eta_2 = (4, -1, 1)^T$，且 A 的秩为 2，则对于任意常数 k_1, k_2, k_3，下列哪个是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解？(　)

   (A) $k_1\eta_1 + k_2\eta_2$　　(B) $\eta_1 + k_3\eta_2$

   (C) $\eta_1 + k_3(\eta_2 - \eta_1)$　　(D) $\eta_1 + k_3(\eta_2 + \eta_1)$

解： 1. B　2. D　3. C　□

问题 3.

1. 给定矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，则 $A^{-1} =$______.
2. 若向量 $(1,1,1)^T, (0,k,2)^T, (0,2,k)^T$ 线性无关，则 k 满足______.
3. 秩为 $n-3$ 的 n 阶矩阵的伴随矩阵的秩为______.
4. 令 A 是正交矩阵，则 $|A^T|^{2025} \cdot |A| =$______.

解： 1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, 2. $k \neq \pm 2$, 3. 0, 4. 1. $\square$

问题 4.

求矩阵 X 满足 $AX = 2X + A$，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

分析

上式可转化为 $(A-2E)X = A$，即：解方程组：

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这其实可以视作三个方程组，而处理方程组的时候，先通过初等变换将其变换成行阶梯形或者行最简形，并且系数相同的方程组可以同时处理：

$$\begin{bmatrix} A-2E & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} U & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} R & \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 & \mathbf{d}_3 \end{bmatrix}$$

从而对应的解可以表示成如下的形式：$\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$(特解 + 零解). 特别的，当转换乘最简形 R 后，$\mathbf{d}_i$ 就是对应的特解。

解： 对其作初等变换可得：

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

该系数矩阵的秩为 3，从而该方程组对每个 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ 都有唯一解，从而 X 就是后半部分，即：

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\square$

注 5.

如果方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对应的系数矩阵的秩 $<$ 列数，则说明该方程组有无穷多解或者无解：

1. 如果 $\mathbf{b} \in \mathbf{C}(A)$，则该方程组有无穷多解，换种表示是说：$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A, \mathbf{b})$.
2. 如果 $\mathbf{b} \notin \mathbf{C}(A)$，换种表示是说：$\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}(A, \mathbf{b})$.

问题 6.

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，尝试判断向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是否线性无关，其中:

1. $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3.$
2. $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3.$

分析

判断线性无关 or 线性相关最基本的方法就是判断，是否存在一组不为零的系数 c_1, c_2, c_3 使得:

$$c_1\boldsymbol{\beta}_1 + c_2\boldsymbol{\beta}_2 + c_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0}$$

注意到 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 线性无关，所以问题可以转化为一个齐次线性方程组，判断其是否存在非零解。

上述分析还引申出了一个新的思路，即构造 X 满足:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix} X$$

从而 $c_1\boldsymbol{\beta}_1 + c_2\boldsymbol{\beta}_2 + c_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0}$ 等价于 $X\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ 是否有非零解。

解:

(1) 假设存在 c_1, c_2, c_3 使得:

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 = 0 \Rightarrow c_1(\alpha_1 + \alpha_2) + c_2(\alpha_2 + \alpha_3) + c_3(\alpha_1 + \alpha_3) = 0$$

从而: $(c_1 + c_3)\alpha_1 + (c_1 + c_2)\alpha_2 + (c_2 + c_3)\alpha_3 = 0$, 即 c_1, c_2, c_3 满足:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0$$

注意到该系数矩阵的秩为 3, 从而该方程组只有零解, 因此 β_1, β_2, β_3 是线性无关的。

(2) 注意到:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

而上式右端矩阵不是可逆的, 从而该向量组线性相关。

□

问题 7.

给定矩阵 $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{bmatrix}$，计算 $\varphi(A)=A^{100}-A^{50}+2A^3$。

分析

这一类问题一般两种做法:

1. 矩阵运算本身有周期性，只有有限个答案。
2. 矩阵 A 可以对角化，注意到对于一个对角矩阵 $\Lambda=\operatorname{diag}\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，有:

$$\varphi(\Lambda)=\operatorname{diag}\varphi(\lambda_1),\cdots,\varphi(\lambda_n)$$

从而若 $A=X\Lambda X^{-1}$，我们有:

$$\varphi(A)=X\varphi(\Lambda)X^{-1}.$$

而对角化的过程就是一个求对应特征值和一组**线性无关的**特征向量的过程。

解: 将 A 对角化可得:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

从而:

$$\varphi(A)=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^{100}-(-1)^{50}+2(-1)^{3}&0&0\\0&2^{100}-2^{50}+2^{4}&0\\0&0&2^{100}-2^{50}+2^{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&2^{100}-2^{50}+2^{4}&0\\0&0&2^{100}-2^{50}+2^{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2&0&L\\0&L&0\\-2&-L&4L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\text{(记: } L=2^{100}-2^{50}+2^{4})$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{8+L}{3}&\frac{2+L}{3}&\frac{2+L}{3}\\0&L&0\\-\frac{8+4L}{3}&\frac{2+L}{3}&\frac{2+4L}{3}\end{bmatrix}$$

$\square$

上海师范大学 Shanghai Normal University

问题 8.

令 A, B 为 n 阶矩阵，其中 A 是对称矩阵，证明 B^TAB 也是对称矩阵。

证明：只需注意到：

$$(B^TAB)^T = B^TA^TB = B^TAB.$$

$\square$

注 9.

希望大家注意的一点是当使用转置、逆、行列式等性质进行运算时，一定要保证你所使用的式子是有意义的，如：

$$|A^TA| = |A^T||A| = |A|^2$$

在一般情况下便是不成立的，因为尽管 A^TA 一定是方阵，但 A 不一定是方阵，所以 $|A|$ 并没有定义。

关于考试和课程

关于考试

1. **不允许使用计算器**。
2. 务必要带好**学生证**供监考老师检查!

关于课程

1. 我尽量避免了繁琐的计算和证明技巧。
2. 更多的是希望大家对基础概念有一定的理解。
3. 希望大家具备最基础的证明的意识和建立一些关于线性代数的几何直观。

课程反馈

- 我设计了一个课程反馈问卷，希望同学们都可以发表一下自己的意见和建议，谢谢。
- 问卷地址：https://www.wjx.cn/vm/w9PRmwF.aspx
- 反馈问卷的二维码：

祝大家考试顺利！ 谢谢聆听！