



上海师范大学  
Shanghai Normal University

# 《线性代数》

2-解线性方程组 (I)(Solving Linear Equations(I))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025 年 2 月 11 日



## 复习：向量的线性组合



给定三个向量：

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其线性组合可以表示为  $x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w}$ ，也就是：

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}$$

### 矩阵表示

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}$$



## 主要内容



上海师范大学  
Shanghai Normal University

- 解线性方程组
- 解线性方程组的矩阵表示
- 矩阵的运算



# 目录



上海师范大学  
Shanghai Normal University

- 解线性方程组
- 解线性方程组的矩阵表示
- 矩阵的运算



## 解线性方程组

## 线性方程组的行图像



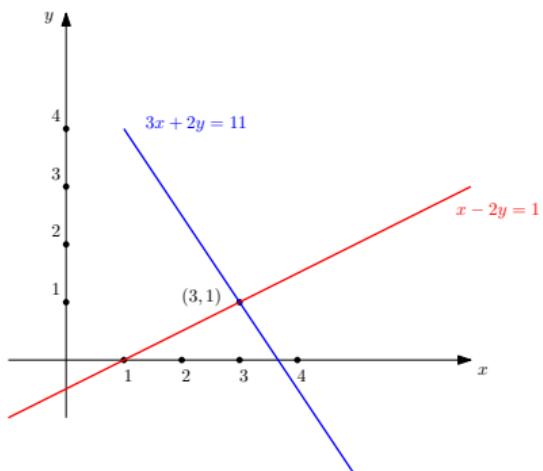
考虑如下的线性方程组：

$$x - 2y = 1$$

$$3x + 2y = 11$$

---

其行图像为：





## 线性方程组的列图像

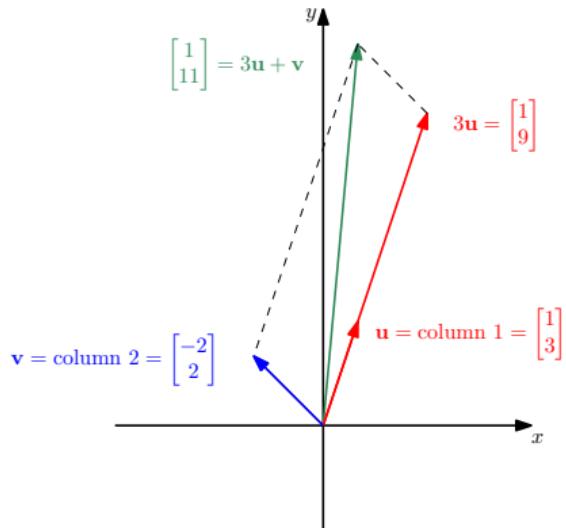


该方程组也可表示为：

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \iff x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

---

其列图像为：





## 线性方程组的矩阵表示



$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \iff x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

---

上述矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  被称作系数矩阵 (coefficient matrix), 我们也可以用点积的形式理解:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1, -2) \cdot (x, y) \\ (3, 2) \cdot (x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 3x + 2y \end{bmatrix}$$

不止 2 维!

以上所有当然可以推广到 3 维, 4 维, ...!



## 一个三元一次方程组的例子 (I)



考虑 3 个变元的例子：

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 2z = 4 \\ 6x - 3y + z = 2 \end{cases}$$

这个方程具有唯一的解  $(x, y, z) = (0, 0, 2)$ 。

### 几何视角

- 从行视角来看，这 3 个方程代表了 3 个平面，它们相交于一个点  $(0, 0, 2)$ 。
- 从列视角来看，这 3 个方程代表了 3 个列向量的线性组合，即：

$$0 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



## 一个三元一次方程组的例子 (II)



同样的，我们有：

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 2z = 4 \\ 6x - 3y + z = 2 \end{cases} \iff \mathbf{Ax} \text{ 记为} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

其  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  是未知数，对应的解是  $(0, 0, 2)$ 。

---

换个角度李连杰， $\mathbf{Ax}$  计算了如下的式子：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

我们可以定义矩阵和向量的乘积了。



对于：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

定义  $Ax$  的第  $i$  部分值为：

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot (x_1, \dots, x_n).$$

---

我们将方程组写成了矩阵乘以向量的形式，即： $Ax = b$ 。下一个问题是，如何求解  $x$ ？



## 高斯消元法 (Gaussian Elimination)



来考虑下面的方程组：

$$\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{array} \implies \begin{array}{l} x - 2y = 1 \text{ (将第一个式子乘以 3)} \\ 8y = 8 \text{ (减去上面的式子消去 } x) \end{array}$$

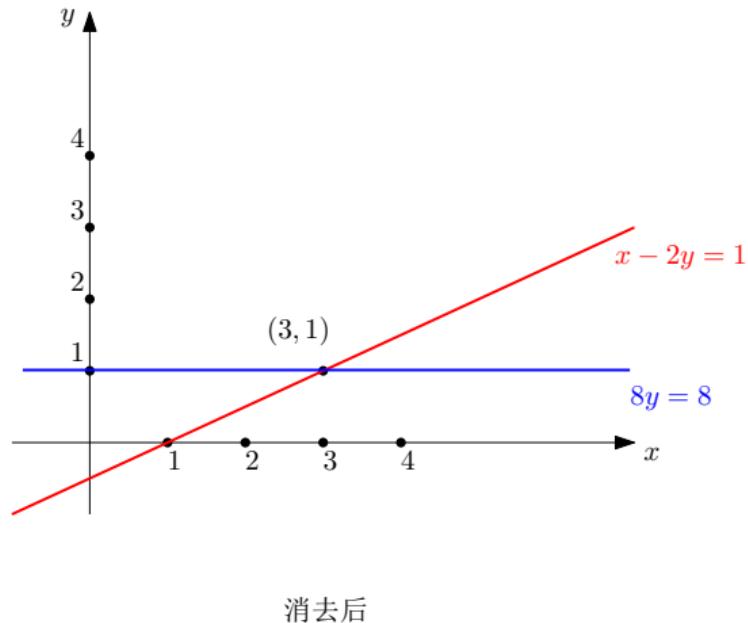
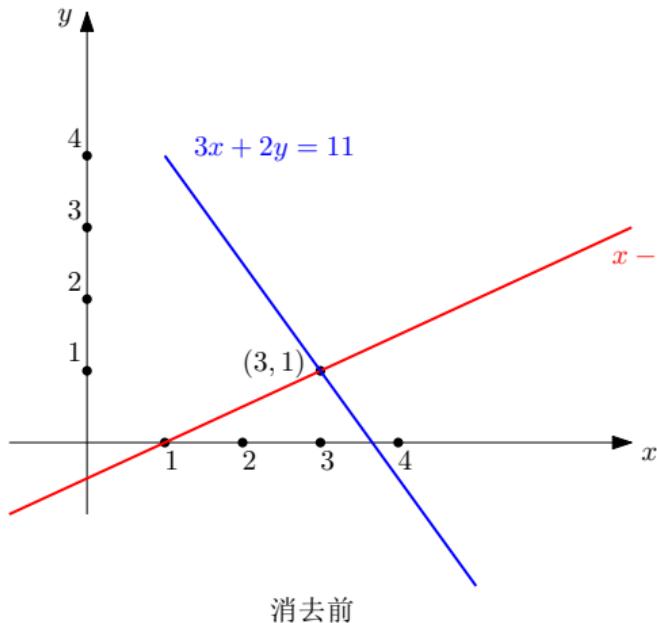
新的方程是上三角的 (upper triangular), 类似的, 有:

$$\begin{array}{l} 4x - 8y = 4 \\ 3x + 2y = 11 \end{array} \implies \begin{array}{l} 4x - 8y = 4 \text{ (将第一个式子乘以 } \frac{3}{4}) \\ 8y = 8 \text{ (减去上面的式子消去 } x) \end{array}$$

- 
- **首元 (pivot):** 行中第一个做其他行消去的非零元素。
  - **倍数 (multiplier):** 用来消去其他行的倍数。



# 几何视角



## 另外一个例子 (I)



考察方程组：

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 3z = 8 \\ -2x - 3y + 7z = 10 \end{cases}$$

- 
1. 第二个等式减去 2 倍的第一个式子，得到  $y + z = 4$ 。
  2. 第三个等式减去  $-1$  倍的第一个式子，得到  $y + 5z = -8$ 。

此时  $x$  已经被消去了，剩下：

$$\begin{cases} 1y + z = 4 \\ y + 5z = -8 \end{cases}$$

## 另外一个例子 (II)



3. 将第二个等式乘以  $-1$ , 然后加上第三个等式, 得到  $4z = 8$ 。
- 

最终得到:

$$\begin{array}{ll} 2x + 4y - 2z = 2 & 2x + 4y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 3z = 8 & \implies 1y + z = 4 \\ -2x - 3y + 7z = 10 & 4z = 8 \end{array}$$

接下来我们只要从最底下的方程组依次往上便可求出对应的解, 以前面的第一个例子为例:

$$\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{array} \implies \begin{array}{l} x - 2y = 1 \text{ (将第一个式子乘以 3)} \\ 8y = 8 \text{ (减去上面的式子消去 } x) \end{array}$$

---

- 由  $8y = 8$  自然而然有  $y = 1$ , 再代入  $x - 2y = 1$  便有  $x = 3$ 。
- 若第二个方程变成  $3x - 6y = 3$ , 则有:

$$\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 3 \end{array} \implies \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 0y = 0 \end{array}$$

由  $0y = 0$  从而有无数多个解。



- 若第二个方程变成  $3x - 6y = 11$ , 则有:

$$\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 11 \end{array} \implies \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 0y = 8 \end{array}$$

$0y = 8$  没有解。

### 首元的个数

可以看到, 消元会失败在当  $n$  个方程没有  $n$  个首元的时候:

- “ $0 \neq 0$ ”的方程: 没有解。
- “ $0 = 0$ ”的方程: 有无数多个解。



- 线性方程组的几何视角，行图像和列图像。
- 线性方程组的矩阵表示，矩阵与向量的乘积。
- 高斯消元法 (Gaussian Elimination)。



## 解线性方程组的矩阵表示



## 矩阵形式



回顾高斯消元法解方程的过程：

$$\begin{array}{l} 2x + 4y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 3z = 8 \\ -2x - 3y + 7z = 10 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 2x + 4y - 2z = 2 \\ 1y + z = 4 \\ 4z = 8 \end{array}$$

我们可以用矩阵形式进行表述：

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

---

记左边形式为  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ，右边的形式为  $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ 。问题在于，**高斯消元法如何影响矩阵形式的变换**，即矩阵  $\mathbf{A}$  如何变到  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{b}$  如何变到  $\mathbf{c}$ ?



## 一步消去步骤的矩阵表示 (I)



我们来考察其一个步骤：

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 8 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 10 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

A                    x                    b

---

第二行减去 2 倍的第一行，得到：

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 1x_2 + 1x_3 = 4 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 10 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$



## 一步消去步骤的矩阵表示 (II)



我们同样希望能够用矩阵来表示这个过程, 即:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

---

注意到:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- 一个很直观的理解, 上述标红的矩阵起到的作用是将第一行的  $-2$  倍加到了第二行上。



## 一步消去步骤的矩阵表示 (III)



自然我们希望：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

---

- 可是我们还没有定义矩阵的乘法？如何去定义？ 点积。
- 我们称上述的矩阵为初等矩阵 (elementary matrix) 或者 消元矩阵 (elimination matrix).



## 矩阵的乘法视角

$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  的列视角:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1(\text{column 1 of } A) + x_2(\text{column 2 of } A) + x_3(\text{column 3 of } A)$$

$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} A$  的行视角:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} A = x_1(\text{row 1 of } A) + x_2(\text{row 2 of } A) + x_3(\text{row 3 of } A)$$

## 矩阵的乘法 $AB$ 理解

$$\bullet AB = A \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & A\mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$$

$$\bullet AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \mathbf{a}_3 B \end{bmatrix}$$



## 单位矩阵



我们现在再回过头来看消元矩阵，我们从如下的单位矩阵 (identity matrix)开始：

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于任意  $\mathbf{b}$  有：

$$E\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

### 注 1.

在很多教材中，单位矩阵被记作  $I$ ，但为了与书本一致，本课程中我们尽量使用  $E$  来表示。



当我们将其中某一项 0 的位置替换成了一个非零的数  $-k$ ，则我们有：

$$E_{21}(-k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - kb_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- 我们将这样子将第  $i$  行第  $j$  列的 0 替换成一个非零的数  $-k$  的矩阵称为  $E_{ij}(-k)$ ，当想仅仅表示这一类矩阵时，我们用  $E_{ij}$  进行表示。
- $E_{ij} \mathbf{b}$  的作用实际上是将  $\mathbf{b}$  的第  $j$  行的  $-k$  倍加到了第  $i$  行后得到的新的向量。

## 定义 2

## [消元矩阵 (I)].

消元矩阵  $E_{ij}(-k)$  是将单位矩阵  $I$  的第  $i$  行第  $j$  列的 0 替换成一个非零的数  $-k$  得到的矩阵。

## 符号说明

教材里使用了  $E_{ij}(-k)$  的符号表示。

有的时候我们需要将两行进行交换，比如如何将  $\mathbf{b}$  的第一行和第二行交换？

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{12} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

### 定义 3

### [消元矩阵 (II)].

消元矩阵  $P_{ij}$  是将单位矩阵  $E$  的第  $i$  行和第  $j$  行进行交换得到的矩阵。

### 符号说明

教材里使用了  $E(i, j)$  的符号表示。

当进行消元的时候, 我们可能需要对某一行进行缩放, 比如如何将  $\mathbf{b}$  的第一行变成原来的  $k$  倍?

$$D = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{12} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$$

#### 定义 4

#### [消元矩阵 (III)].

消元矩阵  $D_i(k)$  是将单位矩阵  $E$  的第  $i$  个对角线上元素由 1 替换成  $k$  得到的矩阵。

#### 符号说明

教材里使用了  $E(i(k))$  的符号表示, 但注意到实际上这类矩阵可以被一个统一的对角矩阵所表示, 所以偶尔我们也会表示成一个统一的对角矩阵。



让我们再来看刚刚的例子：

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$


---

其对应的消元矩阵

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$



## 高斯消元法的矩阵表示 (II)



$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

---

其对应的消元矩阵

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$



## 高斯消元法的矩阵表示 (III)



$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

---

其对应的消元矩阵

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$



我们将上述消去的过程合起来，可以表示成：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \right) \right)$$

## 矩阵乘法的运算规则

我们先不加证明的列举出矩阵乘法的运算性质：

1. 满足结合律 (Associate Law):  $(AB)C = A(BC)$ 。
2. 不满足交换律 (Commutative Law):  $AB \neq BA$ 。



通过矩阵乘法的运算规则可知：

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \right) \right) \\
 &= \left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$



## 高斯消元法的矩阵表示-总结 (III)



回顾线性方程组的表示:

$$2x + 4y - 2z = 2$$

$$4x + 9y - 3z = 8 \quad \Rightarrow$$

$$-2x - 3y + 7z = 10$$

$$2x + 4y - 2z = 2$$

$$1y + z = 4$$

$$4z = 8$$

相应的消元过程可以用矩阵表示为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

和

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$



## 增广矩阵 (Augmented Matrix)



消元对应的矩阵可以同样作用在系数矩阵  $A$  和  $b$  上的，因此可以将其合并成一个矩阵看待：

- 增广矩阵 (Augmented Matrix):  $[A \quad b] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

---

则上述过程可以一并表示为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$



## 阶段总结



- 高斯消元法的矩阵表示
- 消元矩阵, 置换矩阵。
- 矩阵的乘法视角。



## 矩阵的运算



## 定义 5

[矩阵 (Matrix)].

令  $m, n \geq 1$ . 一个  $m \times n$  的矩阵  $A$  具有如下的形式:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

特别的, 我们用  $A(i, j)$  表示矩阵  $A$  的第  $i$  行第  $j$  列的元素。



线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以转换成如下的矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$m \times n$        $n \times 1$        $m \times 1$



## 定义 6

[矩阵加法 (Addition)].

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} & \cdots & a_{1n} + a'_{1n} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} & \cdots & a_{2n} + a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + a'_{m1} & a_{m2} + a'_{m2} & \cdots & a_{mn} + a'_{mn} \end{bmatrix}$$

## 矩阵加法 (II)



将两个线性方程组加起来：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

---

得到：

$$\begin{cases} (a_{11} + a'_{11})x_1 + (a_{12} + a'_{12})x_2 + \cdots + (a_{1n} + a'_{1n})x_n = b_1 + b'_1 \\ (a_{21} + a'_{21})x_1 + (a_{22} + a'_{22})x_2 + \cdots + (a_{2n} + a'_{2n})x_n = b_2 + b'_2 \\ \vdots \\ (a_{m1} + a'_{m1})x_1 + (a_{m2} + a'_{m2})x_2 + \cdots + (a_{mn} + a'_{mn})x_n = b_m + b'_m \end{cases}$$



## 定义 7

[矩阵数乘 (scalar multiplication)].

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$



## 定义 8

## [矩阵乘法 (Matrix Multiplication)].

令  $m, n, p \geq 1$ ,  $A$  是一个  $m \times n$  的矩阵,  $B$  是一个  $n \times p$  的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

则矩阵的乘积  $AB$  是一个  $m \times p$  的矩阵:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

其中  $c_{ij}$  定义为:

$$c_{ij} = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, \dots, b_{nj}) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$



## 说明

当  $p = 1$  的时候便是我们已经定义过的矩阵与向量的乘法。

## 例 9.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \\ 8 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$



## 矩阵乘法视角-替换 (I)



考察如下的两个线性方程组：

$$(I) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$(II) \begin{cases} b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1p}z_p = x_1 \\ b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2p}z_p = x_2 \\ \vdots \\ b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \cdots + b_{np}z_p = x_n \end{cases}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



## 矩阵乘法视角-替换 (II)



如果我们希望用  $z_1, \dots, z_p$  来表示  $y_1, \dots, y_m$ , 则有:

$$\begin{aligned} y_i &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \\ &= a_{i1}(b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \dots + b_{1p}z_p) + \dots + a_{in}(b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \dots + b_{np}z_p) \\ &= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{in}b_{n1})z_1 + \dots + (a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \dots + a_{in}b_{np})z_p \\ &= \sum_{j=1}^p (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \cdot (b_{1j}, \dots, b_{nj})z_j \end{aligned}$$

## 矩阵乘法视角-替换 (III)



用矩阵的形式描述便是由：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix} \right)$$

注意到:  $y_i = \sum_{j=1}^p (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, \dots, b_{nj}) z_j$ , 这就是:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix}$$



当我们把  $B$  看成若干**列向量**组合而成的矩阵时, 即:

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix}$$

---

我们有:

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_p \end{bmatrix}$$

即:

矩阵  $AB$  的每一列都是  $A$  中列向量的线性组合。

## 矩阵乘法的行视角



当我们把  $A$  看成若干 **行向量** 组合而成的矩阵时, 即:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$$

---

我们有:

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B \end{bmatrix}$$

即:

矩阵  $AB$  的每一行都是  $B$  中行向量的线性组合。



## 矩阵乘法的第四种视角



将 A 写成**列向量**的形式：

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

将 B 写成**行向量**的形式：

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

---

则我们有：

$$AB = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

### 注 10.

这里  $a_i b_i$  尽管是两个向量的乘积，但结果是一个矩阵。



下面我们给出矩阵运算的一些性质，我们不妨假定里面的矩阵总是符合运算的要求的：

## 引理 11.

矩阵加法和数乘满足：

1. 交换律 (Commutative Law):  $A + B = B + A$
2. 分配律 (Distributive Law):  $c(A + B) = cA + cB$
3. 结合律 (Associative Law):  $(A + B) + C = A + (B + C)$



### 引理 12.

矩阵乘法满足:

1. 结合律 (不需要括号):  $(AB)C = A(BC)$
2. 分配律 (左分配律):  $(A + B)C = AC + BC$
3. 分配律 (右分配律):  $A(B + C) = AB + AC$

### 注意

我们再次强调, 矩阵乘法不满足交换律, 即一般情况下  $AB \neq BA$ 。



## 阶段总结



- 矩阵以及矩阵运算的定义。
- 矩阵乘法的四种理解方式。
- 矩阵运算的性质。