《线性代数》

3-矩阵 (Matrices)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025 年 2 月 11 日

复习：矩阵运算的规则

引理 1.

矩阵加法和数乘满足:

1. 交换律 (Commutative Law): $A + B = B + A$
2. 分配律 (Distributive Law): $c(A + B) = cA + cB$
3. 结合律 (Associative Law): $(A + B) + C = A + (B + C)$

引理 2.

矩阵乘法满足:

1. 结合律 (不需要括号): $(AB)C = A(BC)$
2. 分配律 (左分配律): $(A + B)C = AC + BC$
3. 分配律 (右分配律): $A(B + C) = AB + AC$
4. 交换律不成立: 一般情况下 $AB \neq BA$

1. $AB(i,j) = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, \ldots, b_{nj}) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$
2. $AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_p \end{bmatrix}$
3. $AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B \end{bmatrix}$
4. $AB = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n$

主要内容

- 分块矩阵
- 逆矩阵
- 转置矩阵和置换矩阵

分块矩阵

我们在乘法中已经展示了矩阵的分块视角:

$$AB = A\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_p\end{bmatrix} \text{和} AB = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m\end{bmatrix} B = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B\end{bmatrix}$$

事实上，只要对应乘法是合法的，矩阵的乘法可以被分解成任意的形式。

一般来说，我们可以将矩阵分块为若干个子矩阵，比如：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}$$

其中每个 A_{ij} 是一个 $m_j \times n_j$ 的矩阵。

例 3.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} E & E & E \\ E & E & E \end{bmatrix}$$

分块乘法

如果对应的矩阵满足乘法的要求，那么分块矩阵的乘法也可以转换为对应块矩阵的乘法：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

- 上述成立的要求在于 A_{ij} 的列数等于 B_{jk} 的行数，也就是对应矩阵的乘法是合法的。

一个例子：矩阵乘法的第四种视角

将 A 写成列向量的形式：

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

将 B 写成行向量的形式：

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$$

则我们有：

$$AB = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n$$

另一个例子：消元的分块 (I)

回顾之前的消元矩阵，比如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

可以将其看成：

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

另一个例子：消元的分块 (II)

一般来说，我们有：

$$\begin{bmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

补充说明

上述的 $D - CA^{-1}B$ 被称作矩阵 A 的舒尔补 (Schur complement)，其在图像处理、优化等领域有着重要的应用。

逆矩阵

回顾 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

其解:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_1 + b_2 \\ x_3 = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases} \quad \text{即:} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\mathbf{b}$$

A, A^{-1} 满足:

$$\begin{aligned} (AA^{-1})\mathbf{x} &= A(A^{-1}\mathbf{b}) = A\mathbf{x} = \mathbf{b} = E\mathbf{b} \\ (A^{-1}A)\mathbf{b} &= A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x} = E\mathbf{x} \end{aligned}$$

定义 4 **[可逆矩阵 (Invertible Matrix)].**

称一个方阵 A(A 是一个 $n\times n$ 的矩阵)是可逆的 (invertbile)，如果存在一个矩阵 A^{-1}，使得:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

例 5.

1. $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$ 是可逆的，其逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$.
2. $C=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$ 是不可逆的。

对角矩阵 (Diagonal Matrix)($d_1, \dots, d_n \neq 0$):

$$D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

是可逆的，其逆矩阵也是对角矩阵:

$$D^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

给定一个 2×2 的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

其是否是可逆的？是的话其逆矩阵是多少？

引理 6.

矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是可逆的当且仅当 $ad - bc \neq 0$，此时其逆矩阵为:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

消元矩阵 E_{ij} 的逆矩阵 (I)

我们再来看消元矩阵$E_{ij}(-k)$:

$$
\begin{array}{cc}
\text{第 } i \text{ 行} & \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & -k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i - k\mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \\
 & \text{第 } j \text{ 列}
\end{array}
$$

其逆矩阵是什么?

$E_{ij}(-k)A$ 得到的是将 A 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行后的矩阵，因此$E_{ij}(-k)^{-1}$ 就应该将第 j 行的 k 倍加到第 i 行后的矩阵，即：

$$E_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

引理 7.

$(E_{ij}(k))^{-1} = E_{ij}(-k)$.

引理 8.

如果方阵 A 是可逆的，那么其逆矩阵是唯一的。

证明：反设存在 B, C 使得 $BA = AC = E$，则注意到：

$$
\begin{aligned}
B(AC) &= (BA)C = EC = C \\
B(AC) &= BE = B
\end{aligned}
$$

从而 $B = C$. $\square$

引理 9.

如果方阵 A 是可逆的，则对于任意的 $\mathbf{b}$，方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解。

证明： 假设 A 是可逆的，令其逆矩阵为 A^{-1}，则:

$$A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

$\square$

推论 10.

如果 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 存在一个非零解，那么 A 不是可逆的。

引理 11.

如果 A 和 B 是可逆的，那么 AB 也是可逆的，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

证明： 注意到：

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E\end{aligned}$$

□

推论 12.

如果 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 都是可逆的，那么 $A_1A_2\cdots A_n$ 也是可逆的，且其逆矩阵为：

$$(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们再来看个例子：

定义 13 **[对角主导矩阵 (Diagonally Dominant Matrix)].**

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称 A 是对角主导的，如果对于每一个 $i \in [n]$，有：

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

定理 14.

如果 A 是对角主导的，那么 A 是可逆的。

证明： 反设 A 是不可逆的，则:

$$Ax = 0$$

存在非零解 $(x_1, \ldots, x_n)$。令 $x_i \overset{\text{def}}{=} \max_{j \in [n] | x_j | > 0}$，则有:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n = 0$$

但是:

$$|a_{ii}||x_i| = |\sum_{j \neq i} a_{ij}x_j| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}||x_j| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}||x_i| = |x_i|(\sum_{j \neq i} |a_{ij}|) < |a_{ii}||x_i|$$

$\square$

阶段总结

上海师范大学 Shanghai Normal University

- 分块矩阵。
- 可逆矩阵。
    - 可逆矩阵的定义，性质。
    - 一些可逆矩阵的例子。

实际上，我们还有许多问题没有解决，比如：

- 如果 $AB = E$ 是否就能说明 A 是可逆的？
- 如何求 A^{-1}？
- $\ldots$

我们将在之后的课程中逐一解决这些问题。

关于可逆矩阵 (II)

一个前瞻性的视角，事实上存在非常多的可逆矩阵刻画，比如：

1. A 的行列式不为 0。
2. A 的秩等于 n。
3. A 的列向量线性无关。
4. A 的列向量张成 $\mathbb{R}^n$。
5. A 的行向量线性无关。
6. A 的行向量张成 $\mathbb{R}^n$。
7. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有一个解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$。
8. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\mathbf{b}$。
9. A 有 n 个首元。
10. A 的所有特征值非零。
11. $\cdots$

我们将在后续的课程一一刻画这些性质。

转置矩阵和置换矩阵

我们看到在矩阵中行和列扮演了不同的角色。我们定义一个新的矩阵：

定义 15 **[转置矩阵 (Tranpose Matrix)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，其转置矩阵 A^T 是一个 $n \times m$ 的矩阵，其满足：

$$(A^T)(i,j) = A_(j,i)$$

例 16.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{的转置矩阵为} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

引理 17.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(cA)^T = cA^T$
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

理解 $(AB)^T = B^T A^T$

Ax 是 A 中列向量的线性组合，而 $x^T A^T$ 则是 A^T 中行向量的线性组合；两者恰好是一致的。

定义 18 **[对称矩阵 (Symmetric Matrix)].**

$n \times n$ 的矩阵 S 是对称的，如果其满足:

$$S^T = S$$

或者说对于任意的 $i, j \in [n]$，有 $S(i,j) = S(j,i)$.

例 19.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$ 是对称矩阵。

引理 20.

1. 若 A 是一个可逆的对称矩阵，那么 A^{-1} 也是对称矩阵。
2. 对任何矩阵 A(不需要是方阵)，$A^{T}A$ 和 AA^{T} 都是对称矩阵。

证明:

1. $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1} = A^{-1}$.
2. $(A^{T}A)^{T} = A^{T}(A^{T})^{T} = A^{T}A$.

$\square$

转置和内积 (Transpose and Inner Product)

我们已经介绍了点乘（内积）·的概念，其也可以由转置矩阵来表示：

引理 21.

- 令 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 是两个 $n \times 1$ 的矩阵，则：

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

- 令 $\mathbf{x}$ 是 $n \times 1$ 的矩阵，$\mathbf{y}$ 是 $m \times 1$ 的矩阵 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，则：

$$A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A^T\mathbf{y}$$

说明

假设 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 是 $n \times 1$ 的矩阵（列向量），则：

- $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ 是一个值。
- $\mathbf{x}\mathbf{y}^T$ 是一个矩阵。

置换矩阵 (Permutation Matrix)(I)

我们再来看消元矩阵P_{ij}:

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n
\end{bmatrix}
$$

其将第 i 行和第 j 行进行了交换，如果我们任意交换行的顺序那?

定义 22.

置换矩阵 P 是将单位矩阵 E 的行重排列得到的矩阵。

例 23.

所有 3×3 的置换矩阵都可以由之前提到的 P_{ij} 得到:

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad P_{21}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad P_{32}P_{21}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$P_{31}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\quad P_{32}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\quad P_{21}P_{32}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

事实 24.

$n\times n$ 的置换矩阵一共有 $n!$ 个。

引理 25.

$P^{-1} = P^{T}$.

证明： 首先可以发现对于任意的矩阵 P_{ij}，有：$P_{ij}^{-1} = P_{ij} = P_{ij}^{T}$。注意到对于任意的置换矩阵 P，其可以被表述为：

$$P = P_{i_1j_1}P_{i_2j_2}\cdots P_{i_kj_k}$$

从而：

$$\begin{aligned}
P^{T} &= (P_{i_1j_1}P_{i_2j_2}\cdots P_{i_kj_k})^{T} = P_{i_kj_k}^{T}P_{i_{k-1}j_{k-1}}^{T}\cdots P_{i_1j_1}^{T} = P_{i_kj_k}P_{i_{k-1}j_{k-1}}\cdots P_{i_1j_1} \\
P^{-1} &= (P_{i_1j_1}P_{i_2j_2}\cdots P_{i_kj_k})^{-1} = P_{i_kj_k}^{-1}P_{i_{k-1}j_{k-1}}^{-1}\cdots P_{i_1j_1}^{-1} = P_{i_kj_k}P_{i_{k-1}j_{k-1}}\cdots P_{i_1j_1}
\end{aligned}$$

因此：

$$P^{T} = P^{-1}$$

$\square$

阶段总结

- 转置矩阵和对称矩阵。
- 置换矩阵及其逆矩阵。