《线性代数》

4-向量空间 (Vector Space)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025 年 2 月 13 日

定义 1 **[可逆矩阵 (Invertible Matrix)].**

称一个方阵 A(A 是一个 $n \times n$ 的矩阵)是可逆的 (invertbile)，如果存在一个矩阵 A^{-1}，使得:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

引理 2.

如果方阵 A 是可逆的，那么其逆矩阵是唯一的。

引理 3.

如果方阵 A 是可逆的，则对于任意的 $\mathbf{b}$，方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解。

推论 4.

如果 $A\mathbf{x} = 0$ 存在一个非零解，那么 A 不是可逆的。

复习-转置矩阵

定义 5 **[转置矩阵 (Tranpose Matrix)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，其转置矩阵 A^{T} 是一个 $n \times m$ 的矩阵，其满足:

$$(A^{T})(i,j) = A_{(}j,i)$$

定义 6.

置换矩阵 P 是将单位矩阵 I 的行重排列得到的矩阵。

引理 7.

$P^{-1} = P^{T}$.

主要内容

- 向量空间
- 子空间

向量空间

定义 8.

空间 $\mathbb{R}^n$ 包含了所有如下的 n 维列向量 $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

其中对于任意的 $i \in [n]$，$v_i \in \mathbb{R}$，这里的 $\mathbb{R}$ 是实数集。

定义 9.

空间 $\mathbb{C}^n$ 包含了所有如下的 n 维列向量 $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

其中对于任意的 $i \in [n]$，$v_i \in \mathbb{C}$，这里的 $\mathbb{C}$ 是复数集。

向量空间的形式化定义 (I)

一个向量空间 V 是一个非空集合，其中的**元素称之为向量**，并且其满足以下两种运算：

- 向量加法：对于任意的 $\mathbf{u}, \boldsymbol{v} \in V$，$\mathbf{u} + \boldsymbol{v} \in V$。
- 数与向量的乘法（数乘）：对于任意的 $\mathbf{u} \in V$ 和任意的实数 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$，$\mathbf{cu} \in V$。

特别的，我们称 V 在加法和数乘下是**封闭的**。

向量空间的形式化定义 (II)

其中的加法满足如下的性质:

1. 加法满足交换律:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

2. 加法满足结合律:

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$$

3. 加法存在一个零元素（唯一的）$\mathbf{0}$，其满足 $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ 对任意的 $\mathbf{u}\in V$。
4. 加法存在一个负元素（逆元），即对于任意的 $\mathbf{u}\in V$，存在一个 $\mathbf{v}\in V$，使得 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{0}$，特别的，将 $\mathbf{v}$ 记为 $-\mathbf{u}$。

其中的数乘满足如下的性质:

5. 数乘存在单位元 $\mathbf{1}$，使得 $\mathbf{1}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ 对于任意的 $\mathbf{u} \in V$。
6. 数乘满足结合律:
$$c_1(c_2\mathbf{u}) = (c_1c_2)\mathbf{u}$$
7. 数乘是线性的，即对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u}, \boldsymbol{v} \in V$ 均有:
$$c(\mathbf{u} + \boldsymbol{v}) = c\mathbf{u} + c\boldsymbol{v}$$
8. 数乘对于加法满足分配律，即对于任意的 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u} \in V$ 均有:
$$(c_1 + c_2)\mathbf{u} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{u}$$

向量空间的形式化定义 (IV)

如果非空集合 V 和其上面的加法和数乘满足上述的 8 条性质，则称 V 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间或者线性空间。

---

1. 事实上，$\mathbb{R}$ 可以扩展成任意复数集 $\mathbb{C}$ 下对四则运算基本上封闭的子集 $\mathbb{F}$ 上，那样可以定义 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。但在本课程中，讨论的基本上都是实数集 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。
2. 在后续的课程中，我们将省略说明 $\mathbb{R}$，直接称之为向量空间或者线性空间。
3. 我们也将不加区分的滥用向量空间和线性空间的称呼。

例子-矩阵组成的向量空间 (I)

对于 $m, n \geqslant 1$，令$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$表示所有的 $m \times n$ 的实数矩阵的集合：

- 其中的加法就定义成矩阵的加法。
- 其中的数乘就定义成矩阵的数乘。

可以验证，$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$是一个向量空间。

例子-矩阵组成的向量空间 (II)

- 矩阵的加法满足交换律和结合律。
- 其零元为全零矩阵 $\mathbf{O}_{m\times n}$, 即所有的入口都是 0。
- 对于任意的 $M \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$，其负元 $-M$ 为：$-M = (-1)M$.
- 数乘的单位元就是 $1 \in \mathbb{R}$.
- 数乘满足结合律和分配律。
- 数乘满足线性性质。

例子-只有一个向量的线性空间

有没有只有一个向量的线性空间呢?

只有一个元素的线性空间

$$Z = \{0\}$$

是一个向量空间。可以认为 $\mathbb{R}^0$ 是 Z 的一个特殊情况。

例子 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \cdots$

通过前面所叙述的向量加法和数乘，可以验证 $\mathbb{R}^n$ 是一个线性空间。

- 所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 组成的集合 $\mathbb{R}^2$。
- 所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 组成的集合 $\mathbb{R}^3$。
- $\cdots$

问题 10.

能否将 $\mathbb{R}^n$ 中推广到 $\mathbb{R}^\infty$ 中?

例子-$\mathbb{R}^\infty$(I)

假设我们遵循着 $\mathbb{R}^n$ 的例子推广，则 $\mathbb{R}^\infty$ 应该是这样的：

- $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \cdots) \mid$ 对所有的 i, $x_i \in \mathbb{R}\}$。
- $c(x_1, x_2, \cdots) = (cx_1, cx_2, \cdots)$。
- $(x_1, x_2, \cdots) + (y_1, y_2, \cdots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots)$。

但问题是：

$$(x_1, x_2, \cdots)$$

是什么？　　函数！

定义集合F:

$$F = F(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$$

- 给定 $f_1, f_2 \in F$，定义函数 $f_1 + f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 为:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

- 对于任意的 $f \in F$ 和 $c \in \mathbb{R}$，定义函数 $cf : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 为:

$$(cf)(x) = cf(x)$$

可以验证，F是一个向量空间。

一个更奇怪的例子

我们再来看一个例子，考虑如下的集合：

$$\mathcal{V} = \mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ and } x > 0\}$$

- 对于任意的 $x, y \in \mathcal{V}$，定义加法运算$\oplus$：$x \oplus y$ 为 $x \oplus y = xy$。
- 对于任意的 $x \in \mathcal{V}$ 和 $c \in \mathbb{R}$，定义数乘运算$\otimes$：$c \otimes x$ 为 $c \otimes x = x^c$。

可以验证，$\mathcal{V}$ 是在 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

引理 11.

零向量 $\mathbf{0}$ 是唯一的。

证明：反设存在两个零向量 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$，则有：

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$$

$\square$

引理 12.

对于任何向量 $\boldsymbol{v}$，其负向量是唯一的。

证明：反设存在两个负向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$，则有：

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1 + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0} + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2$$

$\square$

引理 13 **[向量的消去律 (Cancellation Law)].**

如果 $\mathbf{u}+\boldsymbol{v}=\mathbf{u}+\boldsymbol{w}$，则 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$。

引理 14.

1. $0\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$。
2. $(-1)\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}$。
3. $-(\mathbf{u}+\boldsymbol{v})=(-\mathbf{u})+(-\boldsymbol{v})$.
4. $c\mathbf{0}=\mathbf{0}$。
5. $c(-\mathbf{u})=(-c)\mathbf{u}=-(c\mathbf{u})$.

阶段总结

- 向量空间的概念。一些例子。
- 向量空间的性质。

接下来我们来关注向量空间的一类特殊子集。

子空间

$\mathbb{R}^2$ 中的例子

考察 $\mathbb{R}^2$ 中的两个子集:

- $L_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 是一个向量空间。
- $L_2 = \{(x, x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 不是一个向量空间。

显然并不是所有的子集都是向量空间。我们称这样的子集为子空间。

定义 15 **[子空间 (Subspace)].**

给定一个向量空间 V，如果 W 是 V 的一个非空子集，并且 W 满足如下两个条件：

1. 对于任意的 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$，$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$。
2. 对于任意的 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u} \in W$，$\mathbf{cu} \in W$。

则称 W 是 V 的一个子空间。

定理 16.

如果 W 是线性空间 V 的一个子空间，则 W 对于 V 上定义的加法和数乘运算构成一个向量空间。

子空间的例子 (I)

考察如下集合:

$$\mathcal{W} = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathcal{W}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个子空间，原因在于:

- 对于任意的 $\mathbf{u} = (x_1, y_1, 0), \mathbf{v} = (x_2, y_2, 0) \in \mathcal{W}$，$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in \mathcal{W}$。
- 对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u} = (x, y, 0) \in \mathcal{W}$，$c\mathbf{u} = (cx, cy, 0) \in \mathcal{W}$。

并且，$\mathcal{W}$ 也是一个线性空间。

回顾对角矩阵的定义:

定义 17 **[对角矩阵 (Diagonal Matrix)].**

令 $n \geqslant 1$, $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, 如果对于任意的 $i \neq j$ 均有:

$$A(i,j) = 0$$

则称 A 是一个对角矩阵, 我们也会用 $\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ 来表示。

考虑如下集合:

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A\text{是对角矩阵。}\}$$

则 $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的一个子空间, 其也是一个线性空间。

引理 18.

如果 W 是向量空间 V 的一个子空间，则 $\mathbf{0} \in W$.

证明： 取 $\boldsymbol{w} \in W$，$0\boldsymbol{w} = \mathbf{0} \in W$. $\square$

引理 19.

令 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$，则所有 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 的线性组合 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ 均在 W 中。

证明： 由子空间的定义，对于任意的 $c, d \in \mathbb{R}$，均有：

$$c\mathbf{u}, d\mathbf{v} \in W$$

从而：

$$c\mathbf{u} + d\mathbf{v} \in W$$

$\square$

引理 20.

令 V 是一个向量空间，W 是 V 的一个子集。则 W 是 V 的一个子空间当且仅当：对于任意的 $k \geqslant 0$，$c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in W$ 均有：

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \in W.$$

特别的，当 $k = 0$ 时我们令上述和为 $\mathbf{0}$。

令 $\mathcal{S} \subseteq V$ 是一个线性空间的子集，有：

- $\mathcal{S}$ 不一定是一个子空间。
- $\mathcal{S}$ 可能为空。

如何取构造一个包含 $\mathcal{S}$ 的子空间？

$$\operatorname{span}(\mathcal{S}) = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \mid k \geqslant 0,\ c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathcal{S}\}.$$

定理 21.

令 $\mathcal{S} \subseteq V$，则 $\mathrm{span}(\mathcal{S})$ 是 V 的包含 $\mathcal{S}$ 的最小子空间，即：

1. $\mathrm{span}(\mathcal{S})$ 是 V 的子空间。
2. 令 $\mathcal{W} \subseteq V$ 是一个 V 的子空间，且 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{W}$，则 $\mathrm{span}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{W}$。

下一步

让我们回到矩阵里看看矩阵里的向量空间。

矩阵 A 的列空间

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，我们可以写成如下的形式:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

其中每个 $\mathbf{a}_i$ 是一个 $m \times 1$ 的列向量，我们称其为矩阵 A 的列向量。

定义 22 **[列空间 (Column Space)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，定义其列空间 $\mathbf{C}(A)$ 为:

$$\mathbf{C}(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

即 $\mathbf{C}(A)$ 是所有由 A 的列向量线性组合而成的集合。

列空间与解的关系

定理 23.

列空间 $\mathbf{C}(A)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间。

引理 24.

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解当且仅当 $\mathbf{b} \in \mathbf{C}(A)$。

矩阵 A 的行空间

我们可以利用转置矩阵A^T 的列空间来定义 A 的行空间。

定义 25 **[行空间 (Row Space)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，定义其行空间为矩阵 A^T 的列空间 $C(A^T)$。

引理 26.

矩阵 A 的行空间 $C(A^T)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

这样定义的方法保证了行空间尽管是从行向量去进行考虑，但其形式上依旧是列向量。

定义 27 **[零空间 (Null Space)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，定义其零空间 $\mathbf{N}(A)$ 为:

$$\mathbf{N}(A) = \{x \mid Ax = 0\}$$

即 $\mathbf{N}(A)$ 是所有满足 $Ax = 0$ 的 x 的集合。

定理 28.

零空间 $\mathbf{N}(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

同样的我们可以定义 A^T 的零空间 $\mathbf{N}(A^T)$，我们称其为A 的左零空间，显然:

定理 29.

左零空间 $\mathbf{N}(A^T)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间。

阶段总结

- 子空间的概念、例子以及性质。
- 矩阵的列空间和零空间。
- 生成一个子空间。