《线性代数》

5-相关性、基和维度 (Independence, Basis and Dimension)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025 年 2 月 15 日

一个向量空间 V 是一个非空集合，其中的**元素称之为向量**，并且其满足以下两种运算：

- 向量加法：对于任意的 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$，$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$。
- 数与向量的乘法（数乘）：对于任意的 $\mathbf{u} \in V$ 和任意的实数 $c \in \mathbb{R}$，$c\mathbf{u} \in V$。

特别的，我们称 V 在加法和数乘下是**封闭的**。

其中的加法满足如下的性质:

1. 加法满足交换律:
$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$
2. 加法满足结合律:
$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$$
3. 加法存在一个零元素（唯一的）$\mathbf{0}$，其满足 $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ 对任意的 $\mathbf{u}\in V$。
4. 加法存在一个负元素（逆元），即对于任意的 $\mathbf{u}\in V$，存在一个 $\mathbf{v}\in V$，使得 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{0}$，特别的，将 $\mathbf{v}$ 记为 $-\mathbf{u}$。

其中的数乘满足如下的性质:

5. 数乘存在单位元 1，使得 $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ 对于任意的 $\mathbf{u} \in V$。
6. 数乘满足结合律:
$$c_1(c_2\mathbf{u}) = (c_1c_2)\mathbf{u}$$
7. 数乘是线性的，即对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u}, \boldsymbol{v} \in V$ 均有:
$$c(\mathbf{u} + \boldsymbol{v}) = c\mathbf{u} + c\boldsymbol{v}$$
8. 数乘对于加法满足分配律，即对于任意的 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u} \in V$ 均有:
$$(c_1 + c_2)\mathbf{u} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{u}$$

定义 1 **[子空间 (Subspace)].**

给定一个向量空间 V，如果 W 是 V 的一个非空子集，并且 W 满足如下两个条件:

1. 对于任意的 $\mathbf{u}, \boldsymbol{v} \in W$，$\mathbf{u}+\boldsymbol{v} \in W$。
2. 对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u} \in W$，$c\mathbf{u} \in W$。

则称 W 是 V 的一个子空间。

引理 2.

令 V 是一个向量空间，W 是 V 的一个子集。则 W 是 V 的一个子空间当且仅当：对于任意的 $k \geqslant 0$，$c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in W$ 均有:

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \in W$$

特别的，当 $k = 0$ 时我们令上述和为 $\mathbf{0}$.

复习-子空间的生成

给定向量空间 V 和其子集 $S \subseteq V$，定义:

$$\mathrm{span}(S) = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \mid k \geqslant 0,\ c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in S\}$$

定理 3.

令 $S \subseteq V$，则 $\mathrm{span}(S)$ 是 V 的包含 S 的最小子空间，即:

1. $\mathrm{span}(S)$ 是 V 的子空间。
2. 令 $W \subseteq V$ 是一个 V 的子空间，且 $S \subseteq W$，则 $\mathrm{span}(S) \subseteq W$。

子空间的生成 (I)

现在考虑向量空间 $\mathbb{R}^3$:

- 令 $S_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$，则 $\mathrm{span}(S_1)$ 是什么?
- 令 $S_2 = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,0),(0,0,2)\}$，则 $\mathrm{span}(S_2)$ 是什么?
- 令 $S_3 = \{(2,2,0),(1,1,0)\}$，则 $\mathrm{span}(S_3)$ 是什么?
- 令 $S_4 = \{(x,y,0) \mid x \leqslant y,\ x,y \in \mathbb{R}\}$，则 $\mathrm{span}(S_4)$ 是什么?

上述由 $S_1,\ldots,S_4$ 生成的子空间 $\mathrm{span}(S_1),\ldots,\mathrm{span}(S_4)$ 中:

1. $\mathrm{span}(S_1)=\mathrm{span}(S_2)=\mathrm{span}(S_4)=\mathbb{R}^3$。

可以看到同一个线性空间可以由不同的向量生成，而自然会有如下的问题:

问题 4.

一个子空间究竟需要多少个元素生成?

主要内容

- 线性相关性

- 向量空间的基和维度

线性相关性

我们先来回顾以下线性组合的概念，**固定一个线性空间 V**：

定义 5.

令 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 的线性组合是一个具有如下形式的向量：

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

其中 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$。

说明

$\mathrm{span}(\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\})$ 实际上就是 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 的所有线性组合的集合。

一个例子

考察 $\mathbb{R}^3$ 上的如下四个向量:

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad ,\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

- 对于 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ 来说，我们可以用其中两个向量的线性组合来表示另一个向量，如:

$$\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2.$$

- 对于 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_4$ 来说，我们无法用其中两个向量的线性组合来表示另一个向量，换句话说:

$$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+c_4\boldsymbol{v}_4=\boldsymbol{0}\quad \text{当且仅当}\quad c_1=c_2=c_4=0.$$

我们将上述第一种这样可以互相表示的一组向量称为**线性相关**的，而第二种这样无法用其中某些向量的线性组合来表示的一组向量称为**线性无关**的。

定义 6 **[线性无关 (Linearly Independent)].**

给定一个向量组 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$。如果对于任意的 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$，当且仅当 $c_1 = \cdots = c_n = 0$ 时有:

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

则称 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 是线性无关的。

定义 7 **[线性相关 (Linearly Dependent)].**

给定一个向量组 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$。如果存在 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ 满足至少一个 $c_i \neq 0$，使得:

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

则称 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 是线性相关的。

例 8.

考察 $\mathbb{R}^3$ 上的一些向量:

1. $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$是<u>**线性无关**</u>的。
2. $\{(1,0,0),(1,1,0)\}$是<u>**线性无关**</u>的。
3. $\{(2,2,0),(1,1,0)\}$是<u>**线性相关**</u>的。
4. $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$是<u>**线性相关**</u>的。

还有一些其他的问题:

1. 单个非零向量是线性无关的么?
2. 包含 0 的向量组是线性无关的么?

引理 9.

给定一个向量组 $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$:

1. 若 $\mathcal{A}$ 是线性无关的，则 $\mathcal{A}$ 的任何一个子集都是**线性无关** 的。
2. 向量组 $\mathcal{A}$ 是线性相关的当且仅当至少有一个 $\boldsymbol{v}_i$ 可以表示成其余向量的线性组合。

我们知道，给定矩阵 A，令其表示为:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

则方程 $A\mathbf{x}$ 可以看成是其列向量 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 的线性组合，所以我们有:

引理 10.

给定一个矩阵 A，则:

1. 其列向量是线性无关的当且仅当方程 $A\mathbf{x} = 0$ 只有唯一解 $\mathbf{x} = 0$。
2. 其列向量是线性相关的当且仅当方程 $A\mathbf{x} = 0$ 有非零解。

向量空间的基和维度

给定一个集合 S，回顾 span(S):

$$\mathrm{span}(S)=\{c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{v}_k \mid k\geqslant 0,\ c_1,\cdots,c_k\in\mathbb{R},\ \boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k\in S\}$$

我们知道 span(S) 是一个线性空间，进一步的，我们称span(S) 是由 S 生成的线性空间。

定义 11.

给定一个向量集合 $S\subseteq V$[a]和向量空间 $\mathcal{V}$，如果 $\mathcal{V}=\mathrm{span}(S)$，则称 S 生成了向量空间 $\mathcal{V}$。

[a]这里请大家再次注意，我们后面的讨论都是假定在一个线性空间 V 下进行讨论的，和定义后面的 $\mathcal{V}$ 并不相同。

例 12.

$\mathcal{V}_1=\{(x,y,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个子空间，从而也是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间，考察如下 $\mathbb{R}^3$ 上的一些向量组:

- $S_1=\{(0,1,0),(1,0,0)\}$.
- $S_2=\{(1,1,0),(2,0,0)\}$.
- $S_3=\{(1,1,0),(0,4,0),(1,1,0)\}$.
- $S_4=\{(x,y,0)\mid x\leqslant y,\ x,y\in\mathbb{R}\}$.

不难验证:

$$\mathcal{V}_1=\mathrm{span}(S_1)=\mathrm{span}(S_2)=\mathrm{span}(S_3)=\mathrm{span}(S_4).$$

即 $S_1,\cdots,S_4$ 都生成了 $\mathcal{V}_1$。

例 13.

考察 3×3 实矩阵组成的线性空间 $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ 上的一些向量组 (即一些 3×3 的矩阵):

1. 令: $L_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, 则 L_1 生成的向量空降为:

$$\operatorname{span}(L_1) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

即所有 3×3 的实对角矩阵 $\operatorname{diag}(a, b, c)$ 组成的线性空间 $\mathcal{D}_3$。

上海师范大学 Shanghai Normal University

例 14.

2. 令 $L_2 = \{M_1, \ldots, M_9\}$，其中 $M_1, \ldots, M_9$ 分别为：

$$M_i(j,k) = \begin{cases} 1, & j = i/3,\ k = i\%3, \\ 0, & \text{其他情况}. \end{cases}$$

即 $\{M_i\}_{i\in[9]}$ 遍历了所有的 3×3 只有一个位置为 1 其余都为 0 的实矩阵。不难验证：

$$\mathrm{span}(L_2) = \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

即 L_2 生成了 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$。

上述例子说明，不同的向量组可能生成同样一个空间，比如在例子12中，尽管 S_1, S_2, S_3, S_4 都生成了 V_1，但其各不相同。进一步的可以发现:

1. S_1, S_2 只有 2 个元素。
2. S_3 有 3 个元素。
3. S_4 有无穷多个元素。

所以一个很自然的问题是:

问题 15.

给定一个线性空间 V，我们需要一个多大的集合 S 才能够生成 V?

一个很直观的发现是，如果 S 中有些向量是可以用其他向量的线性组合来表示的，那么这些向量就是多余的，具体来说，比如对于 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$，如果存在**不全为** 0 **的** $c_2, \ldots, c_n$ 使得：

$$\boldsymbol{v}_1 = c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n,$$

则：

$$\operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \operatorname{span}(\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n).$$

这样的向量 $\boldsymbol{v}_1$ 就是多余的。所以我们总可以减少 S 中的元素是的最终集合 S' 应该是**线性无关** 的。我们也称 $S' \subseteq$ 是 S 一个**最大无关组**，其满足：

1. S' 是线性无关的。
2. S 中的任意一个向量都可以用 S' 中的向量的线性组合来表示。

这也就说明 $\operatorname{span}(S') = \operatorname{span}(S)$。事实上从生成线性空间的角度来说，我们将这个 S 称为 $\mathcal{V}$ **的基 (basis)**，S 的元素个数称为 $\mathcal{V}$ **的维度**。

线性空间的基与维度 (III)

上海师范大学 Shanghai Normal University

定义 16 **[线性空间的基 (A Bssis for a Vector Space)].**

一组向量 S 是一个线性空间 $\mathcal{V}$ 的基 如果其满足:

1. S 是**线性无关**的。
2. S **生成了** $\mathcal{V}$，即 $\text{span}(S) = \mathcal{V}$。

定义 17 **[维度 (Dimension)].**

向量空间 $\mathcal{V}$ 的维度，记作 $\dim(V)$, 是指 V 的一个基中的向量个数。

例 18.

1. 在例子12中:
   - S_1, S_2 是**线性无关的**。
   - S_3, S_4 是**线性相关的**。

   从而 S_1, S_2 是 $\mathcal{V}_1$ 的基，而 S_3, S_4 不是 $\mathcal{V}_1$ 的基，并且:

$$|S_1| = |S_2| = 2 \quad \Longrightarrow \quad \dim(\mathcal{V}_1) = 2.$$

2. 在例子13中 L_1 和 L_2 是**线性无关的**。从而:
   - L_1 是 $\mathcal{D}_3$ 的基，并且 $\dim(\mathcal{D}_3) = |L_1| = 3$。
   - L_2 是 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ 的基，并且 $\dim(\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})) = |L_2| = 9$。

例 19.

1. $Z = \{0\}$ 的基是什么？维度是多少？
2. 考虑之前提到的线性空间：

$$F = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

其中的加法和数乘运算定义为：

$$x \oplus y = x \times y, \quad c \otimes x = x^c$$

线性空间 F 的基是什么？维度是多少？

向量空间 Z 的维度

定理 20.

$\dim(Z) = 0$，即Z **不需要任何向量就可以生成。**

其中的关键在于:

$$\sum_{v \in \emptyset} v = 0.$$

$\sum_{v\in\emptyset} v = 0$ 的原因

关键在于加法是可交换的，令 T 是一个有限的向量集，考察 T 的一个划分：

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2,\ \text{其中 } \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \text{ 满足：} \mathrm{T}_1 \cap \mathrm{T}_2 = \emptyset,\ \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2 = \mathrm{T}$$

则我们有：

$$\sum_{v\in\mathrm{T}} v = \sum_{v\in\mathrm{T}_1} v + \sum_{v\in\mathrm{T}_2} v$$

显然有：

$$\sum_{v\in\mathrm{T}} v = \sum_{v\in\emptyset} v + \sum_{v\in\mathrm{T}} v$$

从而：

$$\sum_{v\in\emptyset} v = \sum_{v\in\mathrm{T}} v - \sum_{v\in\mathrm{T}} v = 0$$

$\square$

定理 21.

$\dim(F) = \infty$，即F **需要无穷多个向量来生成。**

事实上，对于任意的 $i \in \mathbb{N}$，定义：

$$f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x = i \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

则对于任意的 $n \in \mathbb{N}$，我们有：

$$f_0, f_1, \ldots, f_n$$

是线性无关的。

有限维的向量空间

如果一个向量空间存在一个有限的基，则称这个向量空间是有限维的。

目前看上去一切都很好，但事实上我们还有一个问题没有解决，回顾例子12中的 $\mathcal{V}_1$，我们发现：

- S_1, S_2 作为**不同的集合**，其都是 $\mathcal{V}_1$ 的基。

这就产生一个问题，**线性空间的基在不唯一的**情况下，**其维度是否还能这样定义？** 或者说，会不会存在一个线性空间 $\mathcal{V}$，其有两个不同的基，并且他们的大小不同？这会导致我们对维度的下列定义**不是一个好定义**：

定义 **[维度 (Dimension)].**

给定一个向量空间 V，其维度，记作 $\dim(\mathrm{V})$, 是指 V 的一个基中的向量个数。

显然只有 V 中所有基的向量个数都相同时，上述定义才是合理的。

引理 22 **[Steinitz Exchange Lemma].**

令 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 是向量空间 V 的一个基，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ 是 V 的一个线性无关的向量组，其中 $1 \leqslant m \leqslant n$。则存在 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-m} < n$，使得 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{n-m}}$ 是 V 的一个基。

说明

当 $m = 0$ 时，上述引理是平凡的。

上海师范大学 Shanghai Normal University

推论 23.

给定一个向量空间 V 和其上的两组基 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$。则 $n = m$。

推论 24.

假设 $\dim(V) = n$，并且 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$ 是线性无关的，则： $m \leqslant n$.

推论 25.

假设 $\dim(V) = n$，并且 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ 是线性无关的，则 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 是 V 的一个基。

现在我们来证明 Steinitz 交换引理。

Steinitz 交换引理的证明 (I)

上海师范大学 Shanghai Normal University

证明：[Steinitz 交换引理的证明] 我们对 m 使用归纳法。

$m = 1$ **的情况:**

由于 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 是 V 的一个基，从而存在 $c_1, \ldots, c_n$ 使得:

$$\boldsymbol{v}_1 = c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n$$

显然 $\boldsymbol{v}_1 \neq 0$，从而存在 $c_i \neq 0$，因此我们有:

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{c_i}\boldsymbol{v}_1 - \frac{c_1}{c_i}\boldsymbol{e}_1 - \cdots - \frac{c_{i-1}}{c_i}\boldsymbol{e}_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i}\boldsymbol{e}_{i+1} - \cdots - \frac{c_n}{c_i}\boldsymbol{e}_n$$

即：$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{e}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 是 V 的一组基。

上海师范大学 Shanghai Normal University

证明：[Steinitz 交换引理的证明 (续)] 我们还需要证明：

$$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{n-m}}$$

是线性无关的。考察如下的线性组合：

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_{i-1}\boldsymbol{e}_{i-1} + c\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$$

- 如果 $c = 0$，则由于 $\boldsymbol{e}_i$ 是线性无关的，从而 $c_1 = \cdots = c_{i-1} = c_{i+1} = \cdots = c_n = 0$。
- 如果 $c \neq 0$，由于 $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{v}_1$ 可以由 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{e}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 的线性组合表示，从而 $\boldsymbol{e}_i$ 可以由 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{e}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 的线性组合表示，矛盾。

证明：[Steinitz 交换引理的证明 (续)]

归纳步骤:

假设命题对于 $\leqslant m-1$ 的情况成立，对于 $=m$ 的情况，令 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ 是线性无关的，注意到 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{m-1}$ 也是线性无关的，从而由归纳假设，存在 $1\leqslant i_1<\cdots<i_{n-m+1}\leqslant n$，使得:

$$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{m-1},\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_{n-m+1}}$$

是 V 中的一组基。从而存在不全为 0 的 $c_1,\ldots,c_{m-1},d_1,d_2,\ldots,d_{n-m+1}$ 使得:

$$\boldsymbol{v}_m=c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_{m-1}\boldsymbol{v}_{m-1}+d_1\boldsymbol{e}_{i_1}+\cdots+d_{m-1}\boldsymbol{e}_{i_{n-m+1}}$$

证明：[Steinitz 交换引理的证明 (续)]

注意到存在 $l \in [n-m+1]$ 使得 $d_l \neq 0$，从而：

$$\boldsymbol{e}_{i_l} = \frac{1}{d_l}\boldsymbol{v}_m - \frac{c_1}{d_l}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \frac{c_{m-1}}{d_l}\boldsymbol{v}_{m-1} - \frac{d_1}{d_l}\boldsymbol{e}_{i_1} - \cdots - \frac{d_{l-1}}{d_l}\boldsymbol{e}_{i_{l-1}} - \frac{d_{l+1}}{d_l}\boldsymbol{e}_{i_{l+1}} - \cdots - \frac{d_{n-m+1}}{d_l}\boldsymbol{e}_{i_{n-m+1}}$$

即：$\boldsymbol{e}_{i_l}$ 可以由 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{l-1}}, \boldsymbol{e}_{i_{l+1}}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{n-m+1}}$ 表示。

进一步可以验证：

$$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{l-1}}, \boldsymbol{e}_{i_{l+1}}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{n-m+1}}$$

是 V 的一组基，即归纳步骤成立，引理得证。

回顾例子13中的线性空间 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ 和 $\mathfrak{D}_3$，我们有:

1. $\mathfrak{D}_3$ 是 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ 的一个子空间。
2. $\dim(\mathfrak{D}_3) = 3 < \dim(\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})) = 9$.

事实上，这一情况在**维度是有限的** 的情形下是成立的:

定理 26.

给定一个向量空间 V 和其子空间 W，如果 V 是有限的，则 W 也是有限的，并且:

$$\dim(W) \leqslant \dim(V)$$

证明： 令量空间 $\mathcal{V}$ 的维度 $\dim(\mathcal{V}) = n$，我们的目标是希望从 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ 中慢慢的扩展出一组基 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ 使得:

$$\mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \mathcal{W}.$$

我们对 k 进行归纳构造。初始化 $k = 0$，此时 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 为空。如果:

$$\mathcal{W} = \mathrm{span}(\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}).$$

则构造已经完成，并且由 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathcal{V}$ 可知:

$$\dim(\mathcal{W}) = k \leqslant n = \dim(\mathcal{V}).$$

否则，存在 $\boldsymbol{v}_{k+1} \in W \setminus \mathrm{span}(\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ 使得:

$$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}$$

是**线性无关**的。并且注意到 $\dim(\mathcal{V}) = n$，从而由 Steinitz 交换引理:

$$k + 1 \leqslant n.$$

$\square$

阶段总结

上海师范大学 Shanghai Normal University

- 线性相关和线性无关的概念。
- 向量空间的基，Steinitz 交换引理。
- 向量空间的维度, 子空间的维度。