



上海师范大学  
Shanghai Normal University

# 《线性代数》

7-解线性方程组 (II)(Solving Linear Equations II)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025 年 3 月 10 日



## 定义 1

[列秩 (Column Rank)].

给定一个  $m \times n$  的矩阵  $A$ , 其列秩 (Column Rank) 定义为:

$$\text{column-rank}(A) = \dim(\mathbf{C}(A))$$

## 定义 2

[行秩 (Row Rank)].

矩阵  $A$  的行秩 (Row Rank) 定义为:

$$\text{row-rank}(A) = \dim(\mathbf{C}(A^T))$$



### 引理 3.

下面的叙述是等价的：

1.  $A$  的行秩是  $n$ .
2.  $A^T$  的列秩是  $n$ .
3. 存在一个矩阵  $B$ , 使得  $A^T B = E$ .
4. 存在一个矩阵  $B$ , 使得  $B A = E$

### 定理 4.

给定一个  $m \times n$  的矩阵, 我们有  $\text{row-rank}(A) = \text{column-rank}(A)$ .



## 复习：高斯若尔当消元法



上海师范大学  
Shanghai Normal University

1. 考察一个矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 注意到对于任意  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ , 方程  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  都有解, 这是因为通过高斯消元法可以发现 A 有3个首元。从而我们通过高斯-若尔当消元法可以解出:

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31} \begin{bmatrix} A & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix}$$

即存在  $B = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3]$  使得  $AB = E$ .

3. 另一方面, 如果令  $C = DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}$ , 我们也有  $CA = E$ .
4. 最终我们可以发现 A 是可逆的, 并且:

$$A^{-1} = B = C = DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}$$

### 引理 5.

令  $A$  是一个  $n \times n$  的矩阵, 下面的叙述是等价的:

1.  $A$  是可逆的。
2. 方程  $Ax = b$  对任意  $b \in \mathbb{R}^m$  都有唯一解。
3.  $\dim(\mathbf{C}(A)) = n$ .
4.  $\dim(\mathbf{C}(A^T)) = n$ .
5. 存在矩阵  $B$  使得  $AB = E$ 。
6. 存在矩阵  $C$  使得  $CA = E$ 。
7.  $A$  有  $n$  个首元。



## 主要内容



上海师范大学  
Shanghai Normal University

- 矩阵的秩
- $Ax = \mathbf{0}$  的解
- $Ax = \mathbf{b}$  的解



## 矩阵的秩



# 行阶梯形



$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 &\vdots &&\Leftrightarrow\\
 a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned}
 \quad \left[ \begin{array}{cccc|c}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\
 a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & x_n
 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right]$$

对于其中每个  $i \in [m]$ , 我们定义:

$$j_i = \begin{cases} +\infty & \text{如果第 } i \text{ 行是零行} \\ \min\{j \in [n] : a_{ij} \neq 0\} & \text{o.w.} \end{cases}$$

即  $a_{ji}$  是第  $j$  行中最左边的不为 0 的系数。

## 行阶梯形 (Row Echelon Form)

这个方程组, 或者说对应的系数矩阵, 是行阶梯形的, 如果存在  $0 \leq r \leq m$  使得:

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r, \quad j_{r+1} = \cdots = j_m = +\infty$$

这也意味着该方程组具有  $r$  个首元  $a_{1j_1}, \dots, a_{rj_r}$ 。

# 行阶梯形的例子



$$\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 1x_2 + 2x_3 = 3 \\ 1x_3 = 2 \end{array} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 4x_1 - 13x_2 + 2x_4 = 0 \\ 11x_2 + x_4 = 6 \end{array} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 4 & -13 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 4x_1 - 13x_2 + 2x_4 = 0 \\ 11x_2 + x_4 = 6 \\ 0 = 7 \end{array} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 4 & -13 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$



## 高斯消元法的精确描述 (I)



我们维护一个值  $r \leq m$  使得：

R1 第一行到第  $r$  行已经满足行阶梯形的形式 (Row Echelon Form), 即：

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$$

R2 对于矩阵中第  $r+1$  行到第  $m$  行第 1 列到第  $j_r$  列是一个全零矩阵, 即:

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i \in [r+1, m], \forall j \in [1, j_r]$$

## 第 1 步

1. 选择最小的  $j \in [n]$  使得第  $j$  列有非零的元素, 如果这样的  $j$  不存在, 意味着  $A = O$  并且当  $r = 0$  时  $R1, R2$  已经满足, 算法结束。
2. 选择最小的  $i \in [m]$  使得  $a_{ij} \neq 0$ 。
3. 将第 1 行与第  $i$  行进行交换, 交换后我们得到在新的第一行中  $a_{1j} \neq 0$ , 并且对于所有的  $t \in [1, j - 1]$  都有  $a_{1t} = 0$ , 此时我们有:  $j_1 = j$ .
4. 对每个  $i' > 1$ , 我们将第  $i'$  行替换成:

$$(\text{row } i') - \frac{a_{i'j}}{a_{1j}} (\text{row } 1)$$

替换之后我们有对于所有的  $i' > 1$ ,  $a_{i'j} = 0$ 。

显然此时对于  $r = 1$ ,  $R1$  和  $R2$  都是满足的。

## 第 $i+1$ 步

此时矩阵对于  $r = i$ ,  $R1$  和  $R2$  都是满足的, 我们继续进行下一步:

1. 选择最小的  $j \in [j_i + 1, n]$  使得存在  $i' \in [i + 1, m]$  使得  $a_{i'j} \neq 0$ , 如果这样的  $j$  不存在, 算法结束。
2. 选择最小的  $i' \in [i + 1, m]$  使得  $a_{i'j} \neq 0$ 。
3. 将第  $i+1$  行与第  $i'$  行进行交换, 交换后我们得到在新的第  $i+1$  行中  $a_{(i+1)j} \neq 0$ , 并且对于所有的  $t \in [1, j-1]$  都有  $a_{(i+1)t} = 0$ , 此时我们有:  $j_{i+1} = j$ .
4. 对每个  $i' > i+1$ , 我们将第  $i'$  行替换成:

$$(\text{row } i') - \frac{a_{i'j}}{a_{(i+1)j}} (\text{row } (i+1))$$

替换之后我们有对于所有的  $i' > i+1$ ,  $a_{i'j} = 0$ 。

显然此时对于  $r = i+1$ ,  $R1$  和  $R2$  都是满足的。



## 一个例子 (I)

考察这样一个矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

第一步的具体过程

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

## 一个例子 (II)

第二步的具体过程

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

## 一个例子 (III)

第三步的具体过程

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时我们有：

$$j_1 = 2, \quad j_2 = 3, \quad j_3 = 5$$



# 矩阵的秩



上海师范大学  
Shanghai Normal University

## 引理 6.

给定一个  $m \times n$  的矩阵  $A$ , 高斯消元法将  $A$  变成一个有  $r$  个首元的行阶梯形矩阵  $U$ 。

我们利用首元的个数来定义矩阵的秩。

## 定义 7

## [矩阵的秩 (Rank)].

给定一个  $m \times n$  的矩阵  $A$ , 其秩 (rank) 定义为:

$$\text{rank}(A) = \text{矩阵 } A \text{ 的首元的个数} = r$$

## 定理 8.

$$\text{rank}(A) = \text{row-rank}(A) = \text{column-rank}(A)$$



# 行最简形

为了证明定理8，我们考虑行最简形矩阵。

## 行最简形 (Reduced Row Echelon Form)

回顾一个  $m \times n$  矩阵  $A$ , 定义:

$$j_i = \begin{cases} +\infty & \text{如果第 } i \text{ 行是零行} \\ \min\{j \in [n] : a_{ij} \neq 0\} & \text{o.w.} \end{cases}$$

则称  $A$  是行最简形的 (Reduced Row Echelon Form), 如果:

1. 其是行阶梯形的, 即存在  $0 \leq r \leq m$  使得:

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r, \quad j_{r+1} = \cdots = j_m = +\infty$$

2.  $a_{1j_1} = \cdots = a_{rj_r} = 1$ , 即所有的首元都是 1。
3. 对于所有的  $l \in [1, r], i \in [1, l-1] \cup [l+1, m]$ , 我们都有  $a_{ij_l} = 0$ , 即在首元的那一列中, 除了首元之外的所有元素都是 0。

## 行最简形的例子



$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$



## 定理 9.

高斯若尔当消元法会将矩阵  $A$  变成一个行最简形矩阵  $R$ 。

## 定理 10.

我们有:

1.  $\text{rank}(A) = \text{rank}(R)$ .
2.  $\text{rank}(R) = \text{column-rank}(R) = \text{row-rank}(R)$ .



## 行变换



上海师范大学  
Shanghai Normal University

我们知道高斯若尔当消元法是通过一系列的行变换来实现的，其中一共有三种行变换：

1. 行加法 (Row Addition)。
2. 行交换 (Row Exchange)。
3. 行乘法 (Row Multiplication)。

我们称其为初等行变换 (Row Elementary Operations)。

## 回顾：行加法

$$E_{ij}(-k)A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & -k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

引理 11.

$$E_{ij}^{-1}(-k) = E_{ij}(k)$$

$$P_{ij} A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

引理 12.

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

## 回顾：行乘法

$$D_i(k)A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_i \\ a_j \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ ka_i \\ a_j \\ a_n \end{bmatrix}$$

引理 13.

$$D_i(k)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{k}\right)$$



## 定理 14.

初等行变换不改变矩阵的行秩和列秩。

**证明：**我们先来证明行变换不改变矩阵的行秩。事实上，令  $A = [a_1^T \ a_i^T \ \dots \ a_m^T]^T$ ，即令其写成行向量的形式，这里  $a_i$  是  $1 \times n$  的行向量。则经过一次初等行变换后，矩阵会变成如下的形式：

$$A' = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_i \\ \vdots \\ a'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{ 或者 } \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{ 或者 } \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

## 行变换的性质 (II)



$$A' = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_i \\ \vdots \\ a'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{ 或者 } \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{ 或者 } \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

我们有：

$$\begin{aligned} C(A^T) &= \text{span}(\{a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_m\}) \\ &= \text{span}(\{a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_m\}) \\ &= \text{span}(\{a_1, \dots, ka_i, \dots, a_j, \dots, a_m\}) \\ &= \text{span}(\{a_1, \dots, a_i - ka_j, \dots, a_j, \dots, a_m\}) \end{aligned}$$

即：

$$\text{row-rank}(A) = \dim(C(A^T)) = \dim(C(A'^T)) = \text{row-rank}(A')$$

## 行变换的性质 (III)



我们现在来考虑列秩。

- 事实上，由于我们已经证明列秩和行秩是相等的，所以我们已经可以得到列秩不改变的结论。
- 但我们依旧想直接证明一下。我们只在这里考虑列交换的情况，其他的情况大家可以自行练习。

我们将  $A$  写成列向量的形式：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_1 \quad \cdots \quad a_i \quad \cdots \quad a_j \quad \cdots \quad a_n]$$

## 行变换的性质 (IV)



交换第  $i$  行和第  $j$  行后：

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_1 & \cdots & a'_i & \cdots & a'_j & \cdots & a'_n \end{bmatrix}$$

- 我们比较一下  $a_i$  和  $a_j$ :

$$a_i = [a_{i1} \ \dots \ \color{red}{a_{ik}} \ \dots \ \color{red}{a_{jk}} \ \dots \ a_{in}]^T$$

$$a'_i = [a_{i1} \ \dots \ \color{red}{a_{jk}} \ \dots \ \color{red}{a_{ik}} \ \dots \ a_{in}]^T$$



## 行变换的性质 (V)

我们现在需要证明:

$$\dim(\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\})) = \dim(\text{span}(\{\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n\}))$$

我们可以发现, 对于任意的  $t \in [n]$ ,  $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_t \leq n$  和任意的  $c_1, \dots, c_t \in \mathbb{R}$ , 我们有:

$$\sum_{l \in [t]} c_l \mathbf{a}_{k_l} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{l \in [t]} c_l \mathbf{a}'_{k_l} = \mathbf{0}$$

也就是说:

- $\mathbf{a}_{k_1}, \dots, \mathbf{a}_{k_t}$  是线性相关的当且仅当  $\mathbf{a}'_{k_1}, \dots, \mathbf{a}'_{k_t}$  是线性相关的。
- $\mathbf{a}_{k_1}, \dots, \mathbf{a}_{k_t}$  是  $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  的一组基当且仅当  $\mathbf{a}'_{k_1}, \dots, \mathbf{a}'_{k_t}$  是  $\text{span}(\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n)$  的一组基。

从而:

$$\dim(\mathbf{C}(A)) = \dim(\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\})) = \dim(\text{span}(\{\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n\})) = \dim(\mathbf{C}(A'))$$





## 定理8的证明

让我们回到定理8。

### 定理 8.

$$\text{rank}(A) = \text{row-rank}(A) = \text{column-rank}(A)$$

证明：

1. 我们将  $A$  变成行阶梯形矩阵  $U$ , 并且假设其有  $r$  个首元, 则  $\text{rank}(A) = r$ 。
2. 进一步我们将  $U$  变换成行最简形, 得到  $R$ , 其还是有  $r$  个首元。
3.  $\text{rank}(R) = \text{column-rank}(R) = \text{row-rank}(R) = r = \text{rank}(A)$ .
4. 注意到我们只使用了初等行变换, 从而:

$$\text{column-rank}(A) = \text{column-rank}(R), \quad \text{row-rank}(A) = \text{row-rank}(R)$$

即:

$$\text{rank}(A) = \text{row-rank}(A) = \text{column-rank}(A)$$



## 阶段总结



上海师范大学  
Shanghai Normal University

- 矩阵的秩  $\text{rank}(A) = \text{矩阵的首元个数}.$
- $\text{rank}(A) = \text{row-rank}(A) = \text{column-rank}(A).$

### 引理 9.

令  $A$  是一个  $n \times n$  的矩阵, 下面的叙述是等价的:

- $A$  是可逆的。
- 方程  $Ax = b$  对任意  $b \in \mathbb{R}^m$  都有唯一解。
- $\text{rank}(A) = n.$
- $\text{column-rank}(A) = n.$
- $\text{row-rank}(A) = n.$
- 存在矩阵  $B$  使得  $AB = E.$
- 存在矩阵  $C$  使得  $CA = E.$



当  $A$  是可逆矩阵的时候，我们已经足够清楚  $Ax = b$  的解了。

### 问题 10.

那对于任意的  $A$ ，比如  $A$  不是可逆的，或者说  $A$  不是方阵的情况那？

►  $Ax = \mathbf{0}$  的解



## 回顾：矩阵的零空间



上海师范大学  
Shanghai Normal University

### 定义 11

[零空间 (Null Space)].

给定一个  $m \times n$  的矩阵  $A$ , 定义其零空间  $\mathbf{N}(A)$  为:

$$\mathbf{N}(A) = \{x \mid Ax = \mathbf{0}\}$$

即  $\mathbf{N}(A)$  是所有满足  $Ax = \mathbf{0}$  的  $x$  的集合。

### 定理 12.

零空间  $\mathbf{N}(A)$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个子空间。



$\dim(\mathbf{N}(A))$



上海师范大学  
Shanghai Normal University

### 引理 13.

$\mathbf{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ , 从而  $\dim(\mathbf{N}(A)) \leq n$ .

### 引理 14.

$\dim(\mathbf{C}(A)) = n$  当且仅当  $\dim(\mathbf{N}(A)) = 0$ .

### 说明

事实上, 这是线性代数基本定理的一个特殊情况:

$$\dim(\mathbf{C}(A)) + \dim(\mathbf{N}(A)) = n$$

证明：令

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

则我们有：

$$\dim(C(A)) = \dim(\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\})) = n$$

$\Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  是  $C(A)$  的一组基

$\Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  线性无关

$$\Leftrightarrow N(A) = \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \dim(N(A)) = 0$$

### 问题 15.

一般情况下怎么去计算  $N(A)$  的一组基。特别的  $\dim(N(A))$ ?

## 一些例子 (I)



$$\begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{array} \implies \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

我们称  $y$  是自由的 (free)。所以:

$$N(A) = \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

我们称下列的解是特解 (special solution):

$$s = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $s$  是将  $y$  设为 1 得到的解。
- $N(A)$  由所有  $s$  的线性组合构成, 即:

$$N(A) = \text{span}(\{s\})$$



## 一些例子 (II)

$$x + 2y + 3z = 0, \quad \text{i.e.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

在这个例子中  $y$  和  $z$  都是自由变量。所以我们可以选择两个特解：

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

同样我们有：

$$\mathbf{N}(A) = \text{span}(\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\})$$



## 求零空间的思路



上海师范大学  
Shanghai Normal University

1. 将矩阵  $A$  变成行阶梯形矩阵  $U$ (Row echelon form)。
2. 寻找到  $U$  的特解。

### 例 16.

让我们从这几个例子再思考一下。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A \\ 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} A & 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}$$



## 矩阵 A 和矩阵 B

### 矩阵 A

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$N(A) = Z = \{\mathbf{0}\}$$

### 矩阵 B

$$B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$N(B) = Z = \{\mathbf{0}\}$$



# 矩阵 C



$$C\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这里存在两个自由变量:

$$\{x_3, x_4\}$$

我们从而可以选择两个特解:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

使得:

$$\mathbf{N}(\mathbf{C}) = \text{span}(\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\})$$



## 首元列和自由列



$$Cx = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在其行阶梯形中：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- 我们称首元 (pivot) 所在的列为**首元列 (pivot column)**, 对应的变量  $x_1, x_2$  称为**主变量 (pivot variables)**
- 剩余的列则称为**自由列 (free columns)**, 对应的变量  $x_3, x_4$  称为**自由变量 (free variables)**



## 行最简形下的首元列视角 (I)



上海师范大学  
Shanghai Normal University

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

在行最简形 (Reduced Row Echelon Form) 下, 所有的主元列构成了一个  $r \times r$  的单位矩阵, 其中  $r = \text{rank}(A)$ .

### 问题 17.

通过不同的初等行变换, 我们是否可以得到不同的首元列和自由列?



## 行最简形下的首元列视角 (II)



$$A = \begin{bmatrix} p & p & f & p & f \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix} \implies R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 个首元列 p    rank r = 3

2 个自由列 f

从而  $Ax = 0$  等价于：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{i.e. } \begin{aligned} x_1 + ax_3 + cx_5 &= 0 \\ x_2 + bx_3 + dx_5 &= 0 \\ x_4 + ex_5 &= 0 \end{aligned}$$



## 主变量和自由变量

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \text{i.e.} \quad \begin{aligned} x_1 + ax_3 + cx_5 &= 0 \\ x_2 + bx_3 + dx_5 &= 0 \\ x_4 + ex_5 &= 0 \end{aligned}$$

我们有：

首元	自由变量
$x_1, x_2, x_4$	$x_3, x_5$

也即， $x_3, x_5$  是可以任意选择的，而  $x_1, x_2, x_4$  则由  $x_3, x_5$  决定：

$$x_1 = -ax_3 - cx_5,$$

$$x_2 = -bx_3 - dx_5,$$

$$x_4 = -ex_5$$



## 特殊解

$$x_1 = -ax_3 - cx_5,$$

$$x_2 = -bx_3 - dx_5,$$

$$x_4 = -ex_5$$

通过选择自由解  $(x_3, x_5) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$  我们得到了两个特殊解:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} -c \\ -d \\ 0 \\ -e \\ 1 \end{bmatrix}$$

并且所有  $Ax = \mathbf{0}$  的解都可以表示成  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  的线性组合 (为什么?), 即:

$$N(A) = N(R) = \text{span}(\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\})$$



## 关于 $Ax = \mathbf{0}$ 一般的描述 (I)



一般来说，令  $A$  是  $m \times n$  的矩阵，我们考虑  $Ax = \mathbf{0}$  的解。我们先使用 Gauss-Jordan 消元法将  $A$  转化成行最简形  $R$ ，即：

$$Ax = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 0 & \cdots & b_{1j_1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{2n} \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j_1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

其  $\text{rank}(A) = r$  意味着存在  $r$  个首元：

$$b_{1j_1} = b_{2j_2} = \cdots = b_{rj_r} = 1$$

也就是

首元	自由变量
$x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$	$x_1, \dots, x_{j_1-1}, x_{j_1+1}, \dots, x_{j_2-1}, \dots, x_{j_r+1}, \dots, x_n$



## 关于 $Ax = 0$ 一般的描述 (II)



$Rx = 0$  对应的方程组为：

$$x_{j_1} + b_{1,j_1+1}x_{j_1+1} + \cdots + b_{1,j_2-1}x_{j_2-1} + b_{1,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + b_{1n}x_n = 0$$

$$x_{j_2} + b_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + b_{2n}x_n = 0$$

⋮

$$x_{j_r} + \cdots + b_{rn}x_n = 0$$

从而我们可以构造出  $n - r$  个特殊解：

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, s_{j_1-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, s_{j_1+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -b_{1,j_1+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots,$$



这意味着:

$$N(A) = N(R) = \text{span}(\{s_1, \dots, s_{j_1-1}, s_{j_1+1}, \dots, s_{j_2-1}, \dots, s_{j_r+1}, \dots, s_n\})$$

## 定理 18.

对于任意的  $m \times n$  的矩阵  $A$ , 我们有:

$$\text{rank}(A) + \dim(N(A)) = n$$

## 定理 19

[Fundamental Theorem of Linear Algebra, Part I].

令  $A$  是一个  $m \times n$  的矩阵并且  $\text{rank}(A) = r$ , 则:

1.  $\dim(C(A)) = \dim(C(A^T)) = r$ 。
2.  $\dim(N(A)) = n - r$ ,  $\dim(N(A^T)) = m - r$ 。



## 阶段总结



上海师范大学  
Shanghai Normal University

- 零空间的基的计算。
- 线性代数的基本定理，第一部分

所以我们目前对于  $Ax = \mathbf{0}$  的解已经有了一个比较清晰的认识。

### 问题 20.

那对于  $Ax = \mathbf{b}$  的解呢？

►  $Ax = \mathbf{b}$  的解



## 三个问题

1. 什么时候  $Ax = b$  有解?
2. 如果  $Ax = b$  有解, 其解的结构是什么?
3. 怎么计算  $Ax = b$  的解?

### 回顾

当  $b = 0$  的时候, 我们已经有了一个比较清晰的认识。其解的结构就是  $N(A)$ , 一个维度为  $n - \text{rank}(A)$  的  $\mathbb{R}^n$  的子空间。



## 第一个问题 (I)



上海师范大学  
Shanghai Normal University

### 定理 21.

$Ax = b$  有解当且仅当  $b \in C(A)$

### 定理 22.

$Ax = b$  有解当且仅当

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix})$$

## 第一个问题 (II)



证明：将  $A$  写成列向量的形式，即：

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

则我们有：

$$Ax = \mathbf{b} \text{ 有解}$$

$$\begin{aligned} &\iff \mathbf{b} \in \mathbf{C}(A) = \text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}) \\ &\iff \text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}) = \text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}) \\ &\iff \dim(\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\})) = \dim(\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\})) \\ &\iff \text{column-rank}(A) = \text{column-rank}(\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}) \\ &\iff \text{rank}(A) = \text{rank}(\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}) \end{aligned}$$



## 第二个问题

现在我们来考察  $Ax = b$  的解的结构，假设  $x_p$  是其一个解，即  $Ax_p = b$ ，我们也称其为特解 (particular solution)。

### 定理 23.

$$Ax = b \iff x - x_p \in N(A)$$

证明：只需注意到：

$$A(x - x_p) = Ax - Ax_p = b - b = 0$$

## ► $Ax = b$ 的通解 (I)



上海师范大学  
Shanghai Normal University

事实上，令  $x_p$  为  $Ax = b$  的任一特解，令：

$$s_1, \dots, s_l$$

是  $Ax = 0$  的一组特殊解，即其零空间  $N(A)$  的一组基，从而  $l = n - \text{rank}(A)$ 。则任何一个  $Ax = b$  的解都可以表示为：

$$x = x_p + c_1 s_1 + \cdots + c_l s_l$$

即一个特解 + 一个齐次解 ( $Ax = 0$ ) 的形式。

## ► $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的通解 (II)



注意到  $A$  的秩  $r$  应当满足：

$$r = \text{rank}(A) = \text{column-rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

从而我们有：

$m$	$n$	$\dim(\mathcal{N}(A))$	$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解的个数
$= r$	$= r$	0	1
$= r$	$> r$	$\geq 1$	$\infty$
$> r$	$= r$	0	0 or 1
$> r$	$> r$	$\geq 1$	0 or $\infty$



## 怎么计算 $Ax = b$ 的解

对其增广矩阵使用 Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$$