



上海师范大学
Shanghai Normal University

《线性代数》

7-解线性方程组 (II)(Solving Linear Equations II)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025 年 3 月 10 日

定义 1

[列秩 (Column Rank)].

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A ，其列秩 (Column Rank) 定义为：

$$\text{column-rank}(A) = \dim(\mathbf{C}(A))$$

定义 2

[行秩 (Row Rank)].

矩阵 A 的行秩 (Row Rank) 定义为：

$$\text{row-rank}(A) = \dim(\mathbf{C}(A^T))$$

引理 3.

下面的叙述是等价的：

1. A 的行秩是 n .
2. A^T 的列秩是 n .
3. 存在一个矩阵 B ，使得 $A^T B = E$ 。
4. 存在一个矩阵 B ，使得 $BA = E$

定理 4.

给定一个 $m \times n$ 的矩阵，我们有 $\text{row-rank}(A) = \text{column-rank}(A)$ 。

1. 考察一个矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 注意到对于任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 都有解, 这是因为通过高斯消元法可以发现 A 有3个首元。从而我们通过高斯-若尔当消元法可以解出:

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31} \begin{bmatrix} A & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix}$$

即存在 $B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix}$ 使得 $AB = E$.

3. 另一方面, 如果令 $C = DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}$, 我们也有 $CA = E$.

4. 最终我们可以发现 A 是可逆的, 并且:

$$A^{-1} = B = C = DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}$$

引理 5.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面的叙述是等价的:

1. A 是可逆的。
2. 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 都有唯一解.
3. $\dim(\mathbf{C}(A)) = n$.
4. $\dim(\mathbf{C}(A^T)) = n$.
5. 存在矩阵 B 使得 $AB = E$ 。
6. 存在矩阵 C 使得 $CA = E$ 。
7. A 有 n 个首元。



- › 矩阵的秩
- › $Ax = 0$ 的解
- › $Ax = b$ 的解

► 矩阵的秩

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 \vdots & \\
 a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned}
 \Leftrightarrow
 \begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \vdots \\
 x_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 \vdots \\
 b_m
 \end{bmatrix}$$

对于其中每个 $i \in [m]$, 我们定义:

$$j_i = \begin{cases} +\infty & \text{如果第 } i \text{ 行是零行} \\ \min\{j \in [n] : a_{ij} \neq 0\} & \text{o.w.} \end{cases}$$

即 a_{ji} 是第 j 行中最左边的不为 0 的系数。

行阶梯形 (Row Echelon Form)

这个方程组, 或者说对应的系数矩阵, 是行阶梯形的, 如果存在 $0 \leq r \leq m$ 使得:

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r, \quad j_{r+1} = \cdots = j_m = +\infty$$

这也意味着该方程组具有 r 个首元 $a_{1j_1}, \dots, a_{rj_r}$ 。

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 1x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 1x_3 &= 2 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 - 13x_2 + 2x_4 &= 0 \\ 11x_2 + x_4 &= 6 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -13 & 0 & 2 \\ 0 & 11 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 - 13x_2 + 2x_4 &= 0 \\ 11x_2 + x_4 &= 6 \\ 0 &= 7 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -13 & 0 & 2 \\ 0 & 11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

我们维护一个值 $r \leq m$ 使得:

R1 第一行到第 r 行已经满足行阶梯形的形式 (Row Echelon Form), 即:

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$$

R2 对于矩阵中第 $r+1$ 行到第 m 行第 1 列到第 j_r 列是一个全零矩阵, 即:

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i \in [r+1, m], \forall j \in [1, j_r]$$

第 1 步

1. 选择最小的 $j \in [n]$ 使得第 j 列有非零的元素, 如果这样的 j 不存在, 意味着 $A = O$ 并且当 $r = 0$ 时 $R1, R2$ 已经满足, 算法结束。
2. 选择最小的 $i \in [m]$ 使得第 $a_{ij} \neq 0$ 。
3. 将第 1 行与第 i 行进行交换, 交换后我们得到在新的第一行中 $a_{1j} \neq 0$, 并且对于所有的 $t \in [1, j-1]$ 都有 $a_{1t} = 0$, 此时我们有: $j_1 = j$ 。
4. 对每个 $i' > 1$, 我们将第 i' 行替换成:

$$(\text{row } i') - \frac{a_{i'j}}{a_{1j}}(\text{row } 1)$$

替换之后我们有对于所有的 $i' > 1$, $a_{i'j} = 0$ 。

显然此时对于 $r = 1$, $R1$ 和 $R2$ 都是满足的。

第 $i + 1$ 步

此时矩阵对于 $r = i$, $R1$ 和 $R2$ 都是满足的, 我们继续进行下一步:

1. 选择最小的 $j \in [j_i + 1, n]$ 使得存在 $i' \in [i + 1, m]$ 使得 $a_{i'j} \neq 0$, 如果这样的 j 不存在, 算法结束。
2. 选择最小的 $i' \in [i + 1, m]$ 使得第 $a_{i'j} \neq 0$ 。
3. 将第 $i + 1$ 行与第 i' 行进行交换, 交换后我们得到在新的第 $i + 1$ 行中 $a_{(i+1)j} \neq 0$, 并且对于所有的 $t \in [1, j - 1]$ 都有 $a_{(i+1)t} = 0$, 此时我们有: $j_{i+1} = j$ 。
4. 对每个 $i' > i + 1$, 我们将第 i' 行替换成:

$$(\text{row } i') - \frac{a_{i'j}}{a_{(i+1)j}} (\text{row } (i + 1))$$

替换之后我们有对于所有的 $i' > i + 1$, $a_{i'j} = 0$ 。

显然此时对于 $r = i + 1$, $R1$ 和 $R2$ 都是满足的。

一个例子 (I)

考察这样一个矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

第一步的具体过程

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

一个例子 (II)

第二步的具体过程

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

一个例子 (III)

第三步的具体过程

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

此时我们有:

$$j_1 = 2, \quad j_2 = 3, \quad j_3 = 5$$

引理 6.

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A ，高斯消元法将 A 变成一个有 r 个首元的行阶梯形矩阵 U 。

我们利用首元的个数来定义矩阵的秩。

定义 7

[矩阵的秩 (Rank)].

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A ，其秩 (rank) 定义为：

$$\text{rank}(A) = \text{矩阵 } A \text{ 的首元的个数} = r$$

定理 8.

$$\text{rank}(A) = \text{row-rank}(A) = \text{column-rank}(A)$$

为了证明定理8, 我们考虑行最简形矩阵。

行最简形 (Reduced Row Echelon Form)

回顾一个 $m \times n$ 矩阵 A , 定义:

$$j_i = \begin{cases} +\infty & \text{如果第 } i \text{ 行是零行} \\ \min\{j \in [n] : a_{ij} \neq 0\} & \text{o.w.} \end{cases}$$

则称 A 是行最简形的 (Reduced Row Echelon Form), 如果:

1. 其是行阶梯形的, 即存在 $0 \leq r \leq m$ 使得:

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r, \quad j_{r+1} = \cdots = j_m = +\infty$$

2. $a_{1j_1} = \cdots = a_{rj_r} = 1$, 即所有的首元都是 1。
3. 对于所有的 $l \in [1, r], i \in [1, l-1] \cup [l+1, m]$, 我们都有 $a_{ij_l} = 0$, 即在首元的那一列中, 除了首元之外的所有元素都是 0。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



定理 9.

高斯若尔当消元法会将矩阵 A 变成一个行最简形矩阵 R 。

定理 10.

我们有：

1. $\text{rank}(A) = \text{rank}(R)$.
2. $\text{rank}(R) = \text{column-rank}(R) = \text{row-rank}(R)$.



我们知道高斯若尔当消元法是通过一系列的行变换来实现的，其中一共有三种行变换：

1. 行加法 (Row Addition)。
2. 行交换 (Row Exchange)。
3. 行乘法 (Row Multiplication)。

我们称其为初等行变换 (Row Elementary Operations)。

$$E_{ij}(-k)A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & -k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

引理 11.

$$E_{ij}^{-1}(-k) = E_{ij}(k)$$

$$P_{ij}A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

引理 12.

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

$$D_i(k)A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & k & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

引理 13.

$$D_i(k)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{k}\right)$$

定理 14.

初等行变换不改变矩阵的行秩和列秩。

证明：我们先来证明行变换不改变矩阵的行秩。事实上，令 $A = [\mathbf{a}_1^T \quad \mathbf{a}_i^T \quad \cdots \quad \mathbf{a}_m^T]^T$ ，即令其写成行向量的形式，这里 \mathbf{a}_i 是 $1 \times n$ 的行向量。则经过一次初等行变换后，矩阵会变成如下的形式：

$$A' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ k\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \text{ 或者 } \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i - k\mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \text{ 或者 } \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$$

行变换的性质 (II)



$$A' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ k\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \text{ 或者 } \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i - k\mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \text{ 或者 } \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(A^T) &= \text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_m\}) \\ &= \text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_m\}) \\ &= \text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, k\mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_m\}) \\ &= \text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i - k\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_m\}) \end{aligned}$$

即:

$$\text{row-rank}(A) = \dim(\mathbf{C}(A^T)) = \dim(\mathbf{C}(A'^T)) = \text{row-rank}(A')$$

我们现在来考虑列秩。

- 事实上，由于我们已经证明列秩和行秩是相等的，所以我们已经可以得到列秩不改变的结论。
- 但我们依旧想直接证明一下。我们只在这里考虑列交换的情况，其他的情况大家可以自行练习。

我们将 A 写成列向量的形式：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

交换第 i 行和第 j 行后:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_1 & \cdots & \mathbf{a}'_i & \cdots & \mathbf{a}'_j & \cdots & \mathbf{a}'_n \end{bmatrix}$$

- 我们比较一下 \mathbf{a}_i 和 \mathbf{a}_j :

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & \mathbf{a_{ik}} & \cdots & \mathbf{a_{jk}} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{a}'_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & \mathbf{a_{jk}} & \cdots & \mathbf{a_{ik}} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}^T$$

我们现在需要证明:

$$\dim(\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\})) = \dim(\text{span}(\{\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n\}))$$

我们可以发现, 对于任意的 $t \in [n]$, $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_t \leq n$ 和任意的 $c_1, \dots, c_t \in \mathbb{R}$, 我们有:

$$\sum_{l \in [t]} c_l \mathbf{a}_{k_l} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{l \in [t]} c_l \mathbf{a}'_{k_l} = \mathbf{0}$$

也就是说:

- $\mathbf{a}_{k_1}, \dots, \mathbf{a}_{k_t}$ 是线性相关的当且仅当 $\mathbf{a}'_{k_1}, \dots, \mathbf{a}'_{k_t}$ 是线性相关的。
- $\mathbf{a}_{k_1}, \dots, \mathbf{a}_{k_t}$ 是 $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ 的一组基当且仅当 $\mathbf{a}'_{k_1}, \dots, \mathbf{a}'_{k_t}$ 是 $\text{span}(\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n)$ 的一组基。

从而:

$$\dim(\mathbf{C}(\mathbf{A})) = \dim(\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\})) = \dim(\text{span}(\{\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n\})) = \dim(\mathbf{C}(\mathbf{A}'))$$

定理8的证明

让我们回到定理8。

定理 8.

$$\text{rank}(A) = \text{row-rank}(A) = \text{column-rank}(A)$$

证明:

1. 我们将 A 变成行阶梯形矩阵 U , 并且假设其有 r 个首元, 则 $\text{rank}(A) = r$ 。
2. 进一步我们将 U 变换成行最简形, 得到 R , 其还是有 r 个首元。
3. $\text{rank}(R) = \text{column-rank}(R) = \text{row-rank}(R) = r = \text{rank}(A)$ 。
4. 注意到我们只使用了初等行变换, 从而:

$$\text{column-rank}(A) = \text{column-rank}(R), \quad \text{row-rank}(A) = \text{row-rank}(R)$$

即:

$$\text{rank}(A) = \text{row-rank}(A) = \text{column-rank}(A)$$

- 矩阵的秩 $\text{rank}(A)$ = 矩阵的首元个数。
- $\text{rank}(A) = \text{row-rank}(A) = \text{column-rank}(A)$.

引理 9.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面的叙述是等价的:

1. A 是可逆的。
2. 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 都有唯一解。
3. $\text{rank}(A) = n$.
4. $\text{column-rank}(A) = n$.
5. $\text{row-rank}(A) = n$.
6. 存在矩阵 B 使得 $AB = E$ 。
7. 存在矩阵 C 使得 $CA = E$ 。

当 A 是可逆矩阵的时候，我们已经足够清楚 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解了。

问题 10.

那对于任意的 A ，比如 A 不是可逆的，或者说 A 不是方阵的情况那？

► $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解

定义 11

[零空间 (Null Space)].

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A ，定义其零空间 $\mathbf{N}(A)$ 为：

$$\mathbf{N}(A) = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

即 $\mathbf{N}(A)$ 是所有满足 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的 \mathbf{x} 的集合。

定理 12.

零空间 $\mathbf{N}(A)$ 是 \mathbb{R}^n 的一个子空间。



引理 13.

$\mathbf{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$, 从而 $\dim(\mathbf{N}(A)) \leq n$.

引理 14.

$\dim(\mathbf{C}(A)) = n$ 当且仅当 $\dim(\mathbf{N}(A)) = 0$ 。

说明

事实上, 这是线性代数基本定理的一个特殊情况:

$$\dim(\mathbf{C}(A)) + \dim(\mathbf{N}(A)) = n$$

证明：令

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

则我们有：

$$\dim(\mathbf{C}(A)) = \dim(\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\})) = n$$

$\Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ 是 $\mathbf{C}(A)$ 的一组基

$\Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关

$\Leftrightarrow \mathbf{N}(A) = \mathbf{Z}$

$\Leftrightarrow \dim(\mathbf{N}(A)) = 0$

问题 15.

一般情况下怎么去计算 $\mathbf{N}(A)$ 的一组基。特别的 $\dim(\mathbf{N}(A))$?

一些例子 (I)

$$\begin{array}{rcl} x + 2y = 0 & & x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 & \implies & 0 = 0 \end{array}$$

我们称 y 是自由的 (free)。所以:

$$N(A) = \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

我们称下列的解是特解 (special solution):

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- \mathbf{s} 是将 y 设为 1 得到的解。
- $N(A)$ 由所有 \mathbf{s} 的线性组合构成, 即:

$$N(A) = \text{span}(\{\mathbf{s}\})$$

$$x + 2y + 3z = 0, \quad \text{i.e.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

在这个例子中 y 和 z 都是自由变量。所以我们可以选择两个特解:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

同样我们有:

$$N(A) = \text{span}(\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\})$$

1. 将矩阵 A 变成行阶梯形矩阵 U (Row echelon form)。
2. 寻找到 U 的特解。

例 16.

让我们从这几个例子再思考一下。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A \\ 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}, \quad C = [A \quad 2A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}$$

矩阵 A

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$N(A) = Z = \{\mathbf{0}\}$$

矩阵 B

$$B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$N(B) = Z = \{\mathbf{0}\}$$



$$C\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这里存在两个自由变量:

$$\{x_3, x_4\}$$

我们从而可以选择两个特解:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

使得:

$$N(\mathbf{C}) = \text{span}(\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\})$$

$$C\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在其行阶梯形中：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- 我们称首元 (pivot) 所在的列为**首元列 (pivot column)**，对应的变量 x_1, x_2 称为**主变量 (pivot variables)**
- 剩余的列则称为**自由列 (free columns)**，对应的变量 x_3, x_4 称为**自由变量 (free variables)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

在行最简形 (Reduced Row Echelon Form) 下, 所有的主元列构成了一个 $r \times r$ 的单位矩阵, 其中 $r = \text{rank}(A)$.

问题 17.

通过不同的初等行变换, 我们是否可以得到不同的首元列和自由列?

行最简形下的首元列视角 (II)



$$A = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{p} & \textcolor{red}{p} & f & \textcolor{red}{p} & f \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix} \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 个首元列 p
2 个自由列 f

rank $r = 3$

从而 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 等价于:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \text{i.e.} \quad \begin{aligned} x_1 + ax_3 + cx_5 &= 0 \\ x_2 + bx_3 + dx_5 &= 0 \\ x_4 + ex_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \text{i.e.} \quad \begin{aligned} x_1 + ax_3 + cx_5 &= 0 \\ x_2 + bx_3 + dx_5 &= 0 \\ x_4 + ex_5 &= 0 \end{aligned}$$

我们有:

首元	自由变量
x_1, x_2, x_4	x_3, x_5

也即, x_3, x_5 是可以任意选择的, 而 x_1, x_2, x_4 则由 x_3, x_5 决定:

$$x_1 = -ax_3 - cx_5,$$

$$x_2 = -bx_3 - dx_5,$$

$$x_4 = -ex_5$$

$$x_1 = -ax_3 - cx_5,$$

$$x_2 = -bx_3 - dx_5,$$

$$x_4 = -ex_5$$

通过选择自由解 $(x_3, x_5) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ 我们得到了两个特殊解:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} -c \\ -d \\ 0 \\ -e \\ 1 \end{bmatrix}$$

并且所有 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解都可以表示成 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ 的线性组合 (为什么?), 即:

$$N(A) = N(R) = \text{span}(\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\})$$

关于 $Ax = 0$ 一般的描述 (I)

一般来说, 令 A 是 $m \times n$ 的矩阵, 我们考虑 $Ax = 0$ 的解。我们先使用 Gauss-Jordan 消元法将 A 转化成行最简形 R , 即:

$$Ax = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \mathbf{b_{1j_1}} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{2n} \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x_{j_1}} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

其 $\text{rank}(A) = r$ 意味着存在 r 个首元:

$$\mathbf{b_{1j_1}} = \mathbf{b_{2j_2}} = \cdots = \mathbf{b_{rj_r}} = 1$$

也就是

首元	自由变量
$\mathbf{x_{j_1}}, \mathbf{x_{j_2}}, \cdots, \mathbf{x_{j_r}}$	$x_1, \cdots, x_{j_1-1}, x_{j_1+1}, \cdots, x_{j_2-1}, \cdots, x_{j_r+1}, \cdots, x_n$

关于 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 一般的描述 (II)

$R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 对应的方程组为:

$$x_{j_1} + b_{1,j_1+1}x_{j_1+1} + \cdots + b_{1,j_2-1}x_{j_2-1} + b_{1,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + b_{1n}x_n = 0$$

$$x_{j_2} + b_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + b_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$x_{j_r} + \cdots + b_{rn}x_n = 0$$

从而我们可以构造出 $n - r$ 个特殊解:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \mathbf{s}_{j_1-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \mathbf{s}_{j_1+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -b_{1,j_1+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots,$$

这意味着:

$$N(A) = N(R) = \text{span}(\{\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_{j_1-1}, \mathbf{s}_{j_1+1}, \cdots, \mathbf{s}_{j_2-1}, \cdots, \mathbf{s}_{j_r+1}, \cdots, \mathbf{s}_n\})$$

定理 18.

对于任意的 $m \times n$ 的矩阵 A , 我们有:

$$\text{rank}(A) + \dim(N(A)) = n$$

定理 19

[Fundamental Theorem of Linear Algebra, Part I].

令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵并且 $\text{rank}(A) = r$, 则:

1. $\dim(\mathbf{C}(A)) = \dim(\mathbf{C}(A^T)) = r$ 。
2. $\dim(N(A)) = n - r$, $\dim(N(A^T)) = m - r$ 。

- 零空间的基的计算。
- 线性代数的基本定理，第一部分

所以我们目前对于 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解已经有了一个比较清晰的认识。

问题 20.

那对于 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解呢？

► $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解

1. 什么时候 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解?
2. 如果 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 其解的结构是什么?
3. 怎么计算 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解?

回顾

当 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 的时候, 我们已经有了一个比较清晰的认识。其解的结构就是 $N(A)$, 一个维度为 $n - \text{rank}(A)$ 的 \mathbb{R}^n 的子空间。

定理 21.

$Ax = b$ 有解当且仅当 $b \in C(A)$

定理 22.

$Ax = b$ 有解当且仅当

$$\text{rank}(A) = \text{rank}\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$$

证明：将 A 写成列向量的形式，即：

$$A = [\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n]$$

则我们有：

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解

$$\iff \mathbf{b} \in \mathbf{C}(A) = \text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\})$$

$$\iff \text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}) = \text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\})$$

$$\iff \dim(\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\})) = \dim(\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}\}))$$

$$\iff \text{column-rank}(A) = \text{column-rank}(\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix})$$

$$\iff \text{rank}(A) = \text{rank}(\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix})$$

现在我们来考察 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解的结构，假设 \mathbf{x}_p 是其一个解，即 $A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}$ ，我们也称其为特解 (particular solution)。

定理 23.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}_p \in N(A)$$

证明：只需注意到：

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的通解 (I)

事实上, 令 \mathbf{x}_p 为 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的任一特解, 令:

$$\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_l$$

是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一组特殊解, 即其零空间 $N(A)$ 的一组基, 从而 $l = n - \text{rank}(A)$ 。则任何一个 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解都可以表示为:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + c_1\mathbf{s}_1 + \dots + c_l\mathbf{s}_l$$

即一个特解 + 一个齐次解 ($A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) 的形式。

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的通解 (II)



注意到 A 的秩 r 应当满足:

$$r = \text{rank}(A) = \text{column-rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

从而我们有:

m	n	$\dim(N(A))$	$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解的个数
$= r$	$= r$	0	1
$= r$	$> r$	≥ 1	∞
$> r$	$= r$	0	0 or 1
$> r$	$> r$	≥ 1	0 or ∞

怎么计算 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解

对其增广矩阵使用 Gauss–Jordan:

$$\left[A \quad \mathbf{b} \right]$$