线性代数 Week 1

线性代数 (I)

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 2 月 11 日

线性代数研究的核心对象是

- **线性空间**（又称**向量空间**）
- 和线性空间之间的**线性映射**（又称**线性变换**）。

线性空间可以视为我们熟悉的一维实数轴 $\mathbb{R}$、二维平面 $\mathbb{R}^2$ 和三维空间 $\mathbb{R}^3$ 的推广，而线性映射则是线性函数的推广。

1 线性函数

例 1.1

考察函数

$$y :=^{1} 3x.$$

等价地，我们可以定义 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $f(x) = 3x$。这就是一个最简单的**线性函数**。

- 在几何意义下，f 刻画了在二维平面 $\mathbb{R}^2$ 上的一条直线。
- 从代数角度看，对于所有的 $x_1, x_2, c, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= f(x_1) + f(x_2) \\ f(cx) &= cf(x). \end{aligned} \tag{1}$$

这就是代数意义下的**线性性**。

[1] 这里符号 := 表达了赋值，即对每一 $x \in \mathbb{R}$ 我们取相应的 y 为 $3x$。

例 1.2 牛顿第二定律

一个大小为 F 的力作用在质量为 m 的物体上会产生加速度 a，即

$$F = ma, \quad \text{这也可以等价地表示为} \quad a = \frac{F}{m}.$$

如果我们固定了物体的质量，那么加速度 a 和力 F 之间就构成了一个线性函数。

在二维平面 $\mathbb{R}^2$ 上，力 F 是一个**二维向量** (F_x, F_y)。其中 F_x 和 F_y 分别是 F 在 x 轴方向与 y 轴方向上的大小。类似的，加速度 a 是一个由在 x 轴上加速度 a_x 和 y 轴上加速度 a_y 构成的二维向

量 (a_x, a_y)。牛顿第二定律在二维平面上可以表述成

$$a = (a_x, a_y) = \left(\frac{F_x}{m}, \frac{F_y}{m}\right).$$

这仍然是一个线性函数，满足前述的两条代数性质 (??):

$$\left(\frac{F_x + F'_x}{m}, \frac{F_y + F'_y}{m}\right) = \left(\frac{F_x}{m}, \frac{F_y}{m}\right) + \left(\frac{F'_x}{m}, \frac{F'_y}{m}\right),$$
$$\left(\frac{c \cdot F_x}{m}, \frac{c \cdot F_y}{m}\right) = c \cdot \left(\frac{F_x}{m}, \frac{F_y}{m}\right).$$

在三维空间里，力 F 和加速度 a 由 x、y 和 z 轴上的分量构成的三维向量表示：

$$F = (F_x, F_y, F_z) \quad \text{且} \quad a = (a_x, a_y, a_z).$$

那么

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{m} \cdot F_x + 0 \cdot F_y + 0 \cdot F_z \\ a_y &= 0 \cdot F_x + \frac{1}{m} \cdot F_y + 0 \cdot F_z \\ a_z &= 0 \cdot F_y + 0 \cdot F_y + \frac{1}{m} \cdot F_z. \end{aligned}$$

我们以后会看到，这个线性函数能由如下**矩阵**来描述

$$\begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/m \end{bmatrix}.$$

- **代数**：研究某些对象的抽象计算规则，建立它们之间的相等关系。例如，

$$(x-3)(x+5) = x^2 + 2x - 15.$$

  线性代数研究的对象不仅包括标量，还有向量、线性空间、矩阵和线性映射。

- **分析**：对某些对象进行估值和近似逼近，研究它们的定性性质而不是定量性质。
- **组合**：对某些对象进行计数，研究它们的数量并进行比较。

2 向量

向量是某个给定**线性空间**的元素；而一个线性空间是由一组可以相加且可以与标量相乘的对象（即向量）构成的集合。我们先从最熟悉的线性空间 -- **二维平面** $\mathbb{R}^2$ 开始，然后将其推广到三维空间 $\mathbb{R}^3$，进而任意 n 维的 $\mathbb{R}^n$。而一般线性空间的定义会在后续章节给出。

向量的表示. $\mathbb{R}^2$ 中的每个向量都由其 x 坐标和 y 坐标唯一确定，它们给出了二维平面 $\mathbb{R}^2$ 上的一个点 (x, y)，而几何上我们视其为由原点 $(0, 0)$ 至 (x, y) 的一个箭头。

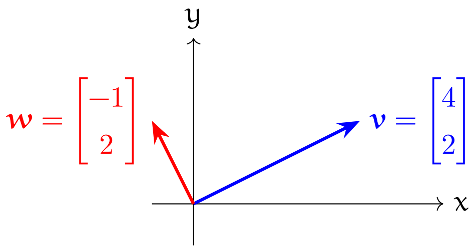

图 1　向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$。这里 $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ 是 $(4, 2)$ **矩阵形式**的表示。采用这种表示的原因在后续讨论中会慢慢显现。

图**??**中的两个向量的三种不同表示由如下表格给出。

向量	数字表示	点表示	箭头表示
$\boldsymbol{v}$	$4, 2$	$(4, 2)$	$(0, 0) \to (4, 2)$
$\boldsymbol{w}$	$-1, 2$	$(-1, 2)$	$(0, 0) \to (-1, 2)$

向量加法. 两个 $\mathbb{R}^2$ 向量的加法就是分别将它们的 x 坐标和 y 坐标相加：

$$\underset{\boldsymbol{v}}{\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}} + \underset{\boldsymbol{w}}{\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}} = \underset{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}}{\begin{bmatrix}v_1 + w_1\\v_2 + w_2\end{bmatrix}}$$

几何上我们可以视其为将第二个向量 $\boldsymbol{w}$（的箭头表示）的起点平移到第一个向量 $\boldsymbol{v}$（的箭头表示）的终点得到的向量。图 **??**给出了图 **??**中的两个向量相加的表示。

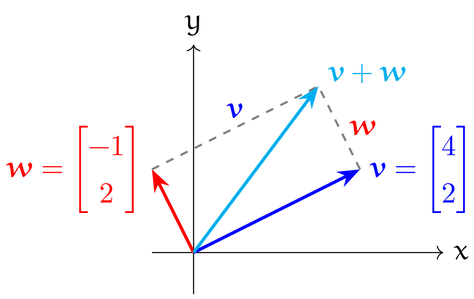

图 2　$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

标量乘法. 我们可以对一个向量的长度进行缩放，这就是对向量进行**标量乘法**运算的几何意义。**标量**是能由数字表示的量。目前我们关心的大多数场合下，标量就是一个实数 $c \in \mathbb{R}$。给定 $\mathbb{R}^2$ 向量 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ 我们定义

$$\underset{\text{标量}}{c} \quad \underset{\boldsymbol{v}}{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}} \quad = \quad \underset{c\boldsymbol{v}}{\begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \end{bmatrix}}.$$

图??中我们将向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度放大了 3 倍，得到了向量 $3\boldsymbol{v}$。注意到 $\boldsymbol{v}$ 和 $3\boldsymbol{v}$ 的方向完全一致。

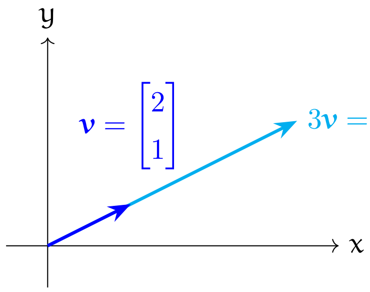

图 3 标量乘法

线性组合. 现在我们可以将向量加法和标量乘法统一到**线性组合**这一概念之下。在图??中我们将两个具体向量做了线性组合。更一般的，

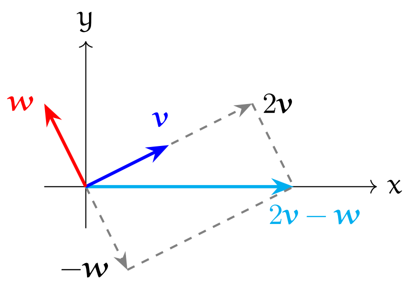

图 4 $2\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\underset{c\boldsymbol{v}}{c\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}} \quad + \quad \underset{d\boldsymbol{w}}{d\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}} \quad = \quad \underset{c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}.}{\begin{bmatrix} cv_1 + dw_1 \\ cv_2 + dw_2 \end{bmatrix}}$$

2.1 高维空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量

我们可以将二维的 $\mathbb{R}^2$ 向量推广到三维 $\mathbb{R}^3$ 中的向量 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$，即每个向量由 x、y 和 z 轴坐标确定，如图??。

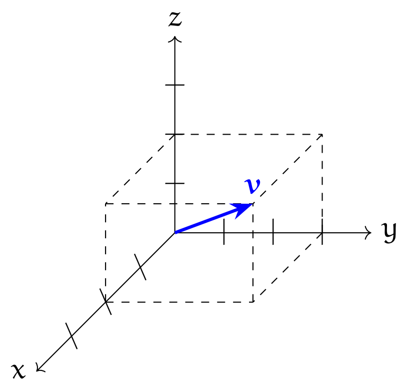

图 5　$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^3$ **中的线性组合.**　考察如下的三个 $\mathbb{R}^3$ 向量

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{和 } \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

我们可以对它们做如下的线性组合:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} = 1\boldsymbol{u} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{v} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

很自然地，对任意 $n \geqslant 1$，我们可以考察形为

$$\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

的向量，即 $\mathbb{R}^n$ 向量。它们的加法、标量乘法以及线性组合都能很容易地定义。

2.2 关于线性组合的重要问题

对给定的一组向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \ldots$，我们经常需要回答以下的一些问题。

1. 所有的线性组合 $c\mathbf{u}$，即集合 $\{c\mathbf{u} \mid c \in \mathbb{R}\}$，构成了什么（几何）对象？
2. 所有的 $c\mathbf{u} + d\boldsymbol{v}$ 构成了什么对象？
3. 所有的 $c\mathbf{u} + d\boldsymbol{v} + e\boldsymbol{w}$ 构成了什么对象？

我们甚至可以研究由 1000 个向量的所有线性组合构成的几何对象。

考察如下的三个向量：

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{和 } \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

那么我们可以验证：

1. 所有的线性组合 $c\mathbf{u}$ 构成了一条经过原点 $(0, 0, 0)$ 的**直线**。
2. 所有的线性组合 $c\mathbf{u} + d\boldsymbol{v}$ 是经过原点 $(0, 0, 0)$ 的一个**平面**。
3. 所有的线性组合 $c\mathbf{u} + d\boldsymbol{v} + e\boldsymbol{w}$ **填满**了整个三维空间 $\mathbb{R}^3$。换言之，对所有的 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 方程组

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ 2y + 3z &= b \\ 3x + y - z &= c \end{aligned}$$

有解。

2.3 向量的长度和点积

在研究 $\mathbb{R}^2$ 向量的时候，我们经常关心的它们的一些几何性质。

1. 向量 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ 的**长度**是

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \tag{2}$$

2. 两个向量 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ 和 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$ 的**夹角**满足

$$\cos\theta = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{\|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\|}.$$

它们都能归约到如下的点积概念。

定义 2.1

任意两个 $\mathbb{R}^2$ 向量 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ 和 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$ 的**点积**（又称**内积**）是

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

更一般的，对两个 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ 和 $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$，它们的内积是

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n = \sum_{i \in [n]} v_i w_i. \tag{3}$$

内积的一些性质.

1. $\mathbb{R}^2$ 向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ **互相垂直**（参见定理**??**）当且仅当

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0.$$

2. 点积满足**交换律**，即对任意 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ 我们都有

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}.$$

   这个性质可以根据内积的定义**??**非常容易地验证。

根据(**??**)和(**??**)，我们定义任意 $\mathbb{R}^n$ 向量的长度概念。

定义 2.2

令 $n \geqslant 1$。任意 $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ 的**长度**是

$$\|\boldsymbol{v}\| := \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{v_1^2 + \cdots v_n^2}.$$

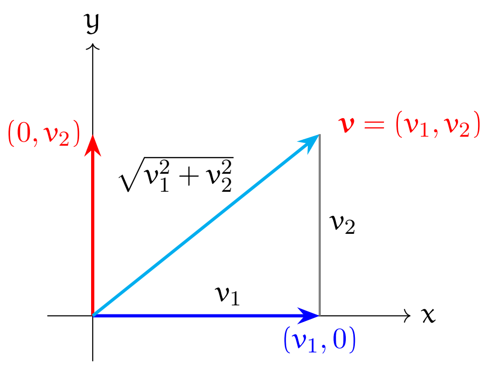

图 6　直角三角形

注 2.3

如图**??**所示，著名的**勾股定理**（又称**毕达哥拉斯定理**）是定义**??**的直接推论。

引理 2.4

对任意向量 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$，它的长度为 0，即 $\|\boldsymbol{v}\| = 0$，当且仅当

$$\boldsymbol{v} = (0, \ldots, 0),$$

即 $\boldsymbol{v}$ 是**零向量**，简记为 $\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$。

证明： 令 $\boldsymbol{v}=(v_1,\ldots,v_n)$。那么

$$|\boldsymbol{v}|=0 \iff \sqrt{v_1^2+\ldots+v_n^2}=0 \iff v_1=\cdots=v_n=0 \iff \boldsymbol{v}=\mathbf{0}.$$

□

定义 2.5

对向量 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$，如果 $\|\boldsymbol{v}\|=1$, 即 $\boldsymbol{v}$ 的长度为 1，那么我们就称 $\boldsymbol{v}$ 为**一单位向量**。

例 2.6

一些典型的单位向量：

$$\mathbf{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \text{和 } \mathbf{u}=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}.$$

考察 $\mathbb{R}^3$ 向量 $\mathbf{u}=(2,2,1)$，它的长度是

$$\|\mathbf{u}\|=\sqrt{2^2+2^2+1}=3.$$

我们可以将其 ``缩短" 为单位向量

$$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right).$$

引理 2.7（标准化）

假设 $\boldsymbol{v}$ 是一 $\mathbb{R}^n$ 非零向量，那么

$$\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}=\frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}=\left(\frac{v_1}{\|\boldsymbol{v}\|},\frac{v_2}{\|\boldsymbol{v}\|},\ldots,\frac{v_n}{\|\boldsymbol{v}\|}\right)$$

是一个和 $\boldsymbol{v}$ 方向一致的单位向量。这个过程称为对 $\boldsymbol{v}$ 进行**标准化**。

定理 2.8

令 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^2$。如果 $\boldsymbol{v}$ 垂直于 $\boldsymbol{w}$，那么 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=0$。

在证明定理**??**之前，我们先讨论 $\mathbb{R}^2$ 向量间的夹角问题。

定理 2.9

假设单位向量 $\mathbf{u},\mathbf{U}\in\mathbb{R}^2$ 夹角为 θ，那么

$$\cos\theta=\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}.$$

证明： 图**??**给出了基于几何的证明。 □

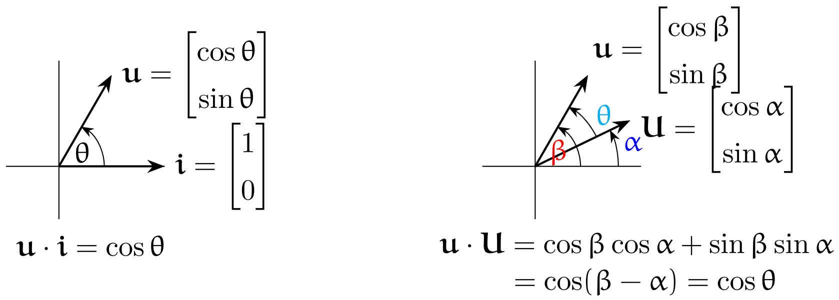

图 7　单位向量间的夹角

定理 2.10

假设两个非零向量 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$ 的夹角为 θ，那么

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}.$$

证明：由引理**??**和定理**??**。 □

现在定理**??**就是定理**??**的直接推论。由于 $|\cos\theta|$ 始终 $\leqslant 1$，对任意 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$ 我们马上就得到如下的 Cauchy-Schwarz-Buniakowsky 不等式。我们以后会看到该不等式的一个不基于 $\cos$ 且对所有 $\mathbb{R}^n$ 向量都成立的证明。

定理 2.11 Cauchy-Schwarz-Buniakowsky

对任意 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$

$$|v\cdot w| \leqslant \|\boldsymbol{v}\|\ \|\boldsymbol{w}\|.$$

著名的三角不等式是定理**??**的直接推论。

定理 2.12 三角不等式

对任意 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\| \leqslant \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|.$$

证明：假设 $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)$ 和 $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_n)$。

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 &= \left\|(v_1+w_1, \dots, v_n+w_n)\right\|^2 \\
&= \sum_{i\in[n]} (v_i+w_i)^2 \\
&= \sum_{i\in[n]} v_i^2 + \sum_{i\in[n]} w_i^2 + 2\sum_{i\in[n]} v_i w_i \\
&= \|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2 + 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \\
&\leqslant \|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2 + 2|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}| \\
&\leqslant \|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2 + 2\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|
\end{aligned}$$

（Cauchy-Schwarz-Buniakowsky 不等式）

$$= (\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|)^2.$$

□

3 矩阵与线性方程组

给定三个 $\mathbb{R}^3$ 向量

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对任意标量 $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$，我们可以构造线性组合 $x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w}$，即

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

在引入**矩阵**和**矩阵乘法**的精确定义后，我们可以将其写成如下的形式：

$$A\boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

需要指出的是，这不仅仅是个形式的变换：(**??**)是对三个向量进行线性组合，x_1, x_2, x_3 是相应的系数（标量）；而(**??**)是将矩阵 A 直接 ``作用" 在向量 (x_1, x_2, x_3) 上得到的结果。

事实上，我们还有一个通过内积理解(**??**)的方式：

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,0,0) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (-1,1,0) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (0,-1,1) \cdot (x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}.$$

3.1 线性方程组

在(**??**)中，取定 $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)$，那么

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}. \tag{6}$$

这个过程就是给定 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 计算向量 $\mathbf{b} = A\boldsymbol{x}$。而作为相反过程，我们也可以给定 $\mathbf{b}$ 求解 $\boldsymbol{x}$。这是线性代数要解决的核心问题之一：求解线性方程组

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{b}.$$

很容易看出上面线性方程组的一般[2]解为

$$\begin{aligned}x_1 &= b_1\\ x_2 &= b_1 + b_2\\ x_3 &= b_1 + b_2 + b_3.\end{aligned}$$

它的矩阵乘法形式为

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}}_{A^{-1}}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

上面已经提到这是计算 $\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$ 的逆过程，因此我们使用了类似反函数的符号 A^{-1}。如果带入(**??**)中得到的向量 $\boldsymbol{b} = (1,1,1)$，我们就得到

$$A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_1+b_2\\b_1+b_2+b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \boldsymbol{x}.$$

这恰好是(**??**)中的向量 $\boldsymbol{x}$。因此我们以后会看到上述两个矩阵

$$A = \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix} \quad 和 \quad A^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

互为**逆矩阵**；而基于它们的乘法运算互为逆过程，如

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad 和 \quad A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

我们也会看到并不是所有的矩阵都有逆矩阵。考察向量

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{w}^* = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

它们线性组合的一般形式是 $x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w}^*$，即

$$x_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1-x_3\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix}.$$

写成矩阵形式我们得到

$$C\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1-x_3\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix}.$$

[2]指对所有 $\boldsymbol{b}$ 都成立。

对于 $\mathbf{b}=(1,3,5)$，线性方程组

$$C\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-x_3\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}=\mathbf{b}$$

就没有解（为什么?）。几何上这说明所有的线性组合

$$x_1\boldsymbol{u}+x_2\boldsymbol{v}+x_3\boldsymbol{w}=x_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

不能填满整个三维空间 $\mathbb{R}^3$。