线性代数 (II)

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 2 月 24 日

1 矩阵和矩阵上的运算

1.1 矩阵运算的一些法则

引理 1.1（矩阵加法法则）

我们假设下面的表达式中的运算都是良定义的（如 $A+B$ 中 A 和 B 有相同的行数和列数）。

（交换律） $A+B=B+A$。

（标量乘法分配律） $c(A+B)=cA+cB$。

（结合律） $A+(B+C)=(A+B)+C$。

引理 1.2（矩阵乘法法则）

我们假设下面的表达式中的运算都是良定义的。

（左侧矩阵乘法分配律） $A(B+C)=AB+AC$。

（右侧乘法分配律） $(A+B)C=AC+BC$。

（结合律） $A(BC)=(AB)C$，因此我们在写多个矩阵的连续乘法不需要括号。

矩阵乘法的交换律不成立！ 我们始终要强调的是，矩阵乘法是不满足**交换律**的，即即使假设下面的运算都是良定义的，依旧有：

$$AB \neq BA.$$

考察如下的两个矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

则我们有：

$$\begin{aligned}AB &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\\ BA &= \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

矩阵的乘法次数

矩阵的乘法在不同的运算顺序下执行的次数差别会非常大。考察如下三个形式的矩阵：

$$A : 1 \times M, \quad B : M \times 1, \quad C : 1 \times M$$

这里 $M \in \mathbb{N}^*$，则我们有：

1. $A(BC)$ 所需的乘法次数为 $1 \times M \times M + M \times 1 \times M = 2M^2$.
2. $(AB)C$ 所需的乘法次数为 $1 \times M \times 1 + 1 \times 1 \times M = 2M$.

足足相差 M 倍！因此我们可以挑选合适的乘法顺序减小计算量。

1.2 分块矩阵和分块上的乘法

上述矩阵乘法的不同视角提示了我们，在计算矩阵的乘法时，我们可以通过将矩阵进行一些分块再来分别计算，如：

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n.$$

分块矩阵. 一个矩阵 A 可以划分成若干个子矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}$$

其中每个 A_{ij} 是一个 $m_i \times n_j$ 的矩阵。如如下矩阵可以表示为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2 & E_2 & E_2 \\ E_2 & E_2 & E_2 \end{bmatrix}$$

其中 $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，也被称为是 2×2 的单位矩阵。

分块矩阵的乘法. 仿照矩阵乘法的形式，我们其实也可以写出在分块矩阵意义下的乘法，如：

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

幸运的是，只要每个具体的运算都是良定义的，即每个矩阵的乘法 $A_{ik}B_{kj}$ 都是良定义的，上述运算就是成立的。因此实际上其与矩阵乘法并无二致。

例 1.3

考察如下矩阵乘法:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-5&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\2&1&2\\5&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&3\\0&-1&-6\\0&-3&-14\end{bmatrix}$$

其可以视为下列线性方程组对 x_1 的消元过程:

$$\begin{aligned}x_1+x_2+3x_3&=2\\2x_1+x_2+2x_3&=8\\5x_1+2x_2+x_3&=10\end{aligned}\quad\Longrightarrow\quad\begin{aligned}x_1+x_2+3x_3&=2\\-x_2-6x_3&=4\\-3x_2-14x_3&=0\end{aligned}$$

我们也可以利用分块的角度来理解上述乘法:

$$\left[\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline-2&1&0\\-5&0&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc}1&1&3\\\hline2&1&2\\5&2&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}-2\\-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}-2\\-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&1&3\\0&-1&-6\\0&-3&-14\end{bmatrix}$$

事实上，一般来说我们有如果 A 是可逆的 (定义见下一节1.3)，我们有:

$$\begin{bmatrix}E&O\\-CA^{-1}&E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&B\\O&D-CA^{-1}B\end{bmatrix}$$

上述的 $D-CA^{-1}B$ 被称作矩阵 A 的舒尔补 (Schur complement)，其在图像处理、优化等领域有着重要的应用。

1.3 逆矩阵

回顾在之前解方程的过程中存在一组矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\quad 和\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

基于它们的乘法运算互为逆过程，如

$$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad 和\quad A^{-1}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

我们已经通过类似反函数的符号来进行表示这个过程，并称其互为**逆**矩阵。现在我们给出一个精确的定义:

定义 1.4 (可逆矩阵, Inverse Matrix)

称一个 $n \times n$ 的方阵 A 是可逆的，如果存在一个矩阵 B，使得：

$$AB = BA = E$$

则将 B 称为 A 的逆矩阵，特别的，我们将矩阵 B 记为 A^{-1}，

例 1.5

对角矩阵：

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

是可逆的，其逆矩阵 D^{-1} 也是对角矩阵：

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

可以验证：

$$DD^{-1} = D^{-1}D = E$$

即使我们仅考虑方阵的情况下，也不是所有的矩阵都有逆矩阵。考察一个 2×2 矩阵 A:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

如果其存在逆矩阵 $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$，则其必须满足：

$$A^{-1}A = E \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} ax + by &= 1 \\ az + bw &= 0 \\ cx + dy &= 1 \\ cz + dw &= 0 \end{aligned}$$

上述方程仅在 $ad - bc \neq 0$ 时有解，此时：

$$x = d,\ y = -b,\ z = -c,\ w = a$$

并且可以验证：

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = E$$

从而 A 是可逆的，当且仅当 $ad-bc\neq 0$，此时其逆矩阵为：

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

逆矩阵的一些性质. 下述引理说明，如果逆矩阵是存在的，那么其是唯一的。

引理 1.6

若方阵 A 是可逆的，那么其逆矩阵是唯一的。

证明： 假设存在两个不同的矩阵 B,C，使得 $BA=AC=E$，则：

$$\begin{aligned} B(AC) &= (BA)C=EC=C \\ B(AC) &= BE=B \end{aligned} \implies B=C$$

□

引理 1.7

若 $n\times n$ 的方阵 A,B 都是可逆的，则矩阵 $C=AB$ 也是可逆的，且 $C^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

证明： 显然 $B^{-1}A^{-1}$ 是良定义的，从而：

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A-1) &= A(B(B^{-1})A-1)=AEA^{-1}=AA^{-1}=E \\ (B^{-1}A-1)(AB) &= B^{-1})(A-1A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E \end{aligned}$$

从而由引理1.6，C 是可逆的，并且 $C^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. □

考虑那些系数构成方阵的线性方程组：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad \text{和} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

下列引理说明了 A 是否可逆决定了方程的解是否唯一。

引理 1.8

若方阵 A 是可逆的，则对于任意的 $\mathbf{b}$，$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有唯一解。

证明： 只需注意到：

$$A^{-1}(A\mathbf{x})=A^{-1}\mathbf{b}\implies(A^{-1}A)\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}\implies\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$$

□

推论 1.9

令 A 是方阵，若 $Ax = 0$ 存在一个非零解，则 A 不可逆。

证明： 由引理1.8直接可得。 □

本节的最后，让我们注意到，由于矩阵的乘法不满足交换律，因而在定义逆矩阵的时候我们需要满足：

$$AB = BA = E$$

若上述等式只满足 $AB = E$ 或者 $BA = E$，其是否还是逆矩阵？

问题 1.10

给定两个方阵 A, B，若 $AB = E$，A 和 B 是否互为可逆矩阵？

答案是肯定的，相关证明将在后续章节中进一步给出。

1.4 转置矩阵和置换矩阵

转置矩阵. 矩阵的行和列扮演了不同的角色，因此我们定义如下的新矩阵：

定义 1.11 (转置矩阵, Transpose Matrix)

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，其转置矩阵 A^T 是一个 $n \times m$ 的矩阵，其满足：

$$(A^T)(i,j) = A(j,i)$$

考虑如下的矩阵：$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 其转置矩阵为：

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

可以看到，转置矩阵可能改变矩阵的形式。

引理 1.12 (转置矩阵的运算法则)

假设下面表达式中的运算都是良定义的。

1. $(A^T)^T = A$
2. $(cA)^T = cA^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

证明： 我们只证明最后两个。

- $(AB)^T = B^T A^T$ 的证明.

  注意到对任意的 i, j 有:

$$(AB)^T(i,j) = AB(j,i) = \sum_{l=1}^{k} A(j,l)B(l,i) = \sum_{l=1}^{k} B^T(i,l)A^T(l,j) = B^T A^T(i,j).$$

  这里假定 k 是 A 的列数。

- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ 的证明.

  利用上述结论有:

$$\begin{aligned} (A^{-1})^T A^T &= (AA^{-1})^T = E, \\ A^T (A^{-1})^T &= (A^{-1}A)^T = E. \end{aligned}$$

$\square$

关于 $(AB)^T = B^T A^T$ 的一个简单理解. 注意到:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_3 + x_2 - x_1 \\ 3x_1 + x_3 - x_2 \end{bmatrix}$$

即: Ax **是对矩阵** A **的列进行的线性组合。**另一方面:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}}_{x^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} &= x_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & 2x_3 + x_2 - x_1 & 3x_1 + x_3 - x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即: $x^T\mathbf{A}^T$ **是对矩阵** A^T **的行进行的线性组合。**从而: $(Ax)^T = x^T\mathbf{A}^T$。(是不是直接这个作为证明更好)

对称矩阵. 考虑如下矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

我们有:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = A$$

我们称这样的矩阵为**对称矩阵**。

定义 1.13 (对称矩阵, Symmetric Matrix)

一个 $n \times n$ 的方阵 S 如果满足其转置矩阵和其相等，即：

$$S^T = S$$

则称 S 为**对称矩阵**。

例 1.14

一个**无向图** G 由顶点和相连的边组成，令表示顶点和边的集合分别为 V 和 $E(G = (V, E))$，其中每条边 $e \in E$ 可以表示为 V 的一个大小为 2 的子集，如 $\{u, v\}$。

为了方便描述，不妨令顶点集由 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 来表示。则 G 可以由如下的一个 $n \times n$ 的矩阵 $A = A(G)$ 来表示：

$$A(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } \{i,j\} \in E \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

我们称 A 是图 G 的**邻接矩阵**，不难验证 A 是对称的。(要不要进一步展开？)

下述引理阐述了对称矩阵的一些性质。

引理 1.15

关于对称矩阵，我们有下列结论：

1. 若 A 是一个可逆的对称矩阵，则 A^{-1} 也是对称矩阵。
2. 对任意矩阵 A(不需要一定是方阵)，AA^T 和 A^TA 都是对称矩阵。

证明： 由引理1.12直接可得。 □

转置矩阵跟内积的关系. 在节??中我们介绍了向量点积的概念，下述引理说明点积也可以利用转置矩阵来表示：

引理 1.16

1. 令 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ 是两个 $n \times 1$ 的矩阵，即 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量，则：

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

2. 令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$，则：

$$A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A^T \mathbf{y}$$

证明： 由定义直接可得。 □

置换矩阵. 我们直接给出**置换矩阵**的定义。

定义 1.17

置换矩阵 P 是将单位矩阵 E 的行进行重排列得到的矩阵。

所有 3×3 的置换矩阵为:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_{32}P_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{21}P_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

命题 1.18

$n \times n$ 的置换矩阵一共有 $n!$ 个。

证明: 只需注意到 n 个元素不同的排列有 $n!$ 个即可。 □

置换矩阵与解线性方程组. 考察如下的方程组:

$$\begin{aligned} 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= 8 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 10 \end{aligned}$$

第一个方程 x_1 的系数为 0，但后两个方程则不是。为了能够消元，我们需要将后两个方程之一换到最上面，如:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= 8 \\ 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 10 \end{aligned}$$

即从矩阵的角度来说，我们需要:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

从线性组合的角度来看，我们有:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{21}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

一般来说，对于如下的一个置换矩阵 P_{ij}(**交换单位矩阵第 i 行和第 j 行得到的矩阵**)，我们有

$$
\underbrace{\begin{array}{r}
\\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\
\end{array}\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}}_{P_{ij}}
\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}
$$

置换矩阵的逆矩阵. 我们先考虑上述提到的置换矩阵 P_{ij}，其是由单位矩阵仅仅交换第 i 行和第 j 行所得到的，不难发现我们有：

$$
\begin{aligned}
P_{ij} &= P_{ij}^T \\
P_{ij}^T P_{ij} &= P_{ij} P_{ij}^T = P_{ij} P_{ij} = E
\end{aligned}
$$

从而：

$$
P_{ij}^{-1} = P_{ij} = P_{ij}^T
$$

有趣的是，所有的置换矩阵都是可逆的，而且其逆矩阵恰好都是自己的转置矩阵！

引理 1.19

令 P 是一个置换矩阵，则 P 是可逆的，并且：

$$
P^{-1} = P^T
$$

证明： 注意到任意的置换矩阵 P，其都表示成有限个形如置换矩阵 P_{ij} 的乘积，即：

$$
P = P_{i_1 j_1} P_{i_2 j_2} \cdots P_{i_k j_k}
$$

从而：

$$
\begin{aligned}
P^T &= (P_{i_1 j_1} P_{i_2 j_2} \cdots P_{i_k j_k})^T = P_{i_k j_k}^T P_{i_{k-1} j_{k-1}}^T \cdots P_{i_1 j_1}^T = P_{i_k j_k} P_{i_{k-1} j_{k-1}} \cdots P_{i_1 j_1} \\
P^{-1} &= (P_{i_1 j_1} P_{i_2 j_2} \cdots P_{i_k j_k})^{-1} = P_{i_k j_k}^{-1} P_{i_{k-1} j_{k-1}}^{-1} \cdots P_{i_1 j_1}^{-1} = P_{i_k j_k} P_{i_{k-1} j_{k-1}} \cdots P_{i_1 j_1}
\end{aligned}
$$

即：

$$
P^{-1} = P^T
$$

□