线性代数 Week 4

线性代数 (IV)

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 2 月 22 日

1 向量空间

我们先介绍一个基本的**向量空间**$\mathbb{R}^n$:

定义 1.1

空间 $\mathbb{R}^n$ 包含了所有如下的 n 维列向量 $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

其中对于任意的 $i \in [n]$，$v_i \in \mathbb{R}$，这里的 $\mathbb{R}$ 是实数集。

简而言之，$\mathbb{R}^i$ **就是所有每个分量都是实数的 i 维列向量的全体**。如果我们允许分量是复数，那么我们可以定义复数域上的向量空间 $\mathbb{C}^n$:

定义 1.2

空间 $\mathbb{C}^n$ 包含了所有如下的 n 维列向量 $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

其中对于任意的 $i \in [n]$，$v_i \in \mathbb{C}$，这里的 $\mathbb{C}$ 是复数集。

例 1.3

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个元素，通常我们喜欢用 xOy 平面来表示 $\mathbb{R}^2$，每个向量都表示了平面上一个点 (x, y)。
2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个元素，通常我们喜欢用三维空间来表示 $\mathbb{R}^3$，每个向量都表示了空间中的一个点 (x, y, z)。

3. $\begin{bmatrix} 1+2i \\ 3-4i \end{bmatrix}$ 则是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个元素。

在 $\mathbb{R}^n$ 我们定义过两种运算:

1. 向量的加法运算:
$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \text{有 } \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{bmatrix}$$
2. 向量的数乘运算:
$$\forall k \in \mathbb{R}, \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \text{有 } k\mathbf{v} = \begin{bmatrix} kv_1 \\ \vdots \\ kv_n \end{bmatrix}$$

这两个运算具备的一个重要特点是，在运算后的结果仍然是 $\mathbb{R}^n$ 中的元素，即 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $k\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$。这就是我们所说的**这两个运算对于 $\mathbb{R}^n$ 是封闭的**。除此以外，向量加法和数乘运算还具备如下的性质:

对向量加法来说:

1. 加法满足交换律:
$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}.$$
2. 加法满足结合律:
$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}.$$
3. 加法存在一个零元素（唯一的）$\mathbf{0} \in \mathbb{R}$，其满足 $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$ 对任意的 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$。
4. 加法存在一个负元素（逆元），即对于任意的 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$，存在一个 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$，使得 $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{0}$，特别的，将 $\mathbf{v}$ 记为 $-\mathbf{u}$。

对数乘运算来说:

5. 数乘存在单位元 $1 \in \mathbb{R}$，使得 $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ 对于任意的 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.。
6. 数乘满足结合律:
$$c_1(c_2\mathbf{u}) = (c_1c_2)\mathbf{u}.$$
7. 数乘是线性的，即对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 均有:
$$c(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = c\mathbf{u}+c\mathbf{v}.$$
8. 数乘对于加法满足分配律，即对于任意的 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ 均有:
$$(c_1+c_2)\mathbf{u} = c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{u}.$$

我们将上述**向量空间**的概念进行一下扩展，不在局限于 $\mathbb{R}^n$ 和其上的这两种运算上:

定义 1.4 (向量空间，或者线性空间)

令 V 是一个非空集合，定义 V 上的两种封闭的运算：

1. V 上的加法运算：
$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \text{ 有 } \mathbf{u}+\mathbf{v} \in V.$$
2. V 在 $\mathbb{R}$[a] 上的数乘运算：
$$\forall k \in \mathbb{R}, \ \mathbf{v} \in V, \text{ 有 } k\mathbf{v} \in V.$$

并且这两种运算具备如下的性质：

1. 加法满足交换律：
$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}.$$
2. 加法满足结合律：
$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}.$$
3. 加法存在一个零元素（唯一的）$\mathbf{0} \in V$，其满足 $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ 对任意的 $\mathbf{u} \in V$。
4. 加法存在一个负元素（逆元），即对于任意的 $\mathbf{u} \in V$，存在一个 $\mathbf{v} \in V$，使得 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{0}$，特别的，将 $\mathbf{v}$ 记为 $-\mathbf{u}$。
5. 数乘存在单位元 $1 \in \mathbb{R}$，使得 $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$ 对于任意的 $\mathbf{u} \in V$。
6. 数乘满足结合律：
$$c_1(c_2\mathbf{u})=(c_1c_2)\mathbf{u}.$$
7. 数乘是线性的，即对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 均有：
$$c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}.$$
8. 数乘对于加法满足分配律，即对于任意的 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u} \in V$ 均有：
$$(c_1+c_2)\mathbf{u}=c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{u}.$$

则称 V 是 $\mathbb{R}$ 上的一个**向量空间**或者**线性空间**[b][c]；特别的，在讨论 V 的时候，其中的元素被称为**向量**，零元素和负元素被称为**零向量**和**负向量**。

[a]这里的数域可以不一定是 $\mathbb{R}$，是复数域 $\mathbb{C}$ 上的满足四则运算封闭的子集 $\mathbb{F}$ 就可以，这样定义的就是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，但本课程关注的主要还是实数集 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

[b]实际上，如果数域不同，也不能算是相同的线性空间。

[c]后面，我们将不加区分的滥用**向量空间**和**线性空间**的称呼。

下面我们再通过一些其他的例子来理解线性空间的概念：

- **只有一个元素的线性空间：** 考察如下的集合 $\mathbb{Z}=\{0\}$，其只有一个**零元素**，显然我们可以定义上面

的加法和在 $\mathbb{R}$ 上的运算:

1. 加法: $0+0=0$。
2. 数乘: $\forall c\in\mathbb{R},\ c0=0$。

显然 Z 符合定义1.4中的所有条件，因此 Z 是一个线性空间[1]。

- **由所有 $m\times n$ 矩阵组成的线性空间:** 对于 $m,n\geqslant 1$，令$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$表示所有的 $m\times n$ 的实数矩阵的集合:

  - 其中的加法就定义成**矩阵的加法**。
  - 其中的数乘就定义成**矩阵在 $\mathbb{R}$ 上的数乘**。

  注意到:

  1. 矩阵的加法满足交换律和结合律。
  2. 其零元为全零矩阵 $O_{m\times n}$, 即所有的入口都是 0。
  3. 对于任意的 $M\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$，其负元 $-M$ 为: $-M=(-1)M$.
  4. 数乘的单位元就是 $1\in\mathbb{R}$.
  5. 数乘满足结合律和分配律。
  6. 数乘满足线性性质。

  因此 $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ 是是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

- **无限维向量 (?) 组成的线性空间 $\mathbb{R}^\infty$:** 显然 $\mathbb{R}^n$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，那如果将 $n\to\infty$，则 $\mathbb{R}^\infty$ 应该是这样的:

  1. $\mathbb{R}^\infty=\{(x_1,x_2,\cdots)\mid \text{对所有的 } i,\ x_i\in\mathbb{R}\}$。
  2. $c(x_1,x_2,\cdots)=(cx_1,cx_2,\cdots)$。
  3. $(x_1,x_2,\cdots)+(y_1,y_2,\cdots)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots)$。

  实际上我们可以发现，$(x_1,x_2,\cdots)$ 实际上定义的是一个**$\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 上的函数**!

  定义集合F:

$$F=F(\mathbb{N}\to\mathbb{R})=\{f\mid f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\}$$

  - 给定 $f_1,f_2\in F$，定义函数 $f_1+f_2:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 为:

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

  - 对于任意的 $f\in F$ 和 $c\in\mathbb{R}$，定义函数 $cf:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 为:

$$(cf)(x)=cf(x)$$

不难验证，F 上的加法和数乘满足线性空间的所有条件，因此 F 是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间。

我们再来考虑如下一个特殊的例子。

[1] $\mathbb{R}^0$ 可以被认为是 Z 的一个特殊情况。

例 1.5（一个特殊的例子）

考虑如下的集合：

$$\mathcal{V} = \mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ and } x > 0\}$$

- 对于任意的 $x, y \in \boldsymbol{v}$，定义加法运算$\oplus$: $x \oplus y$ 为 $x \oplus y = xy$。
- 对于任意的 $x \in \boldsymbol{v}$ 和 $c \in \mathbb{R}$，定义数乘运算$\otimes$: $c \otimes x$ 为 $c \otimes x = x^c$。

可以验证，$\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

线性空间的一些性质: 我们下面介绍线性空间 上的一些普遍性质。

引理 1.6

零向量 $\mathbf{0}$ 是唯一的。

证明： 反设存在两个零向量 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$，则有：

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$$

□

引理 1.7

对于任何向量 $\boldsymbol{v}$，其负向量是唯一的。

证明： 反设存在两个负向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$，则有：

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1 + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0} + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2$$

□

引理 1.8（向量的消去律 (Cancellation Law)）

如果 $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$，则 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$。

证明： 由：

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{0} + \boldsymbol{v} = (-\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) = (-\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w} = \mathbf{0} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}$$

□

引理 1.9

1. $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$。
2. $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$。
3. $-(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (-\mathbf{u}) + (-\mathbf{v})$.
4. $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$。
5. $c(-\mathbf{u}) = (-c)\mathbf{u} = -(c\mathbf{u})$.

证明:

1. $0\mathbf{v} = (0+0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}$，由消去律可得 $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$。
2. $(-1)\mathbf{v} + \mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} + 1\mathbf{v} = (-1+1)\mathbf{v} = \mathbf{0}$，从而 $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$。
3. $((-\mathbf{u}) + (-\mathbf{v})) + (\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (-\mathbf{u}+\mathbf{u}) + (-\mathbf{v}+\mathbf{v}) = \mathbf{0}$，从而 $-(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (-\mathbf{u}) + (-\mathbf{v})$。
4. $c\mathbf{0} = c(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = c\mathbf{0} + c\mathbf{0}$，从而 $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$。
5. $c\mathbf{u} + (-c)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = c(\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = c\mathbf{u} + c(-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$，从而 $c(-\mathbf{u}) = (-c)\mathbf{u} = -(c\mathbf{u})$。

□

注 1.10

上述引理1.9阐述的一个重要的点是，一个向量 $\mathbf{u}$ 的负向量 $-\mathbf{u}$ 实际上就是 $(-1)\mathbf{u}$，因此在后续的过程中 $-\mathbf{u}$ 和 $(-1)\mathbf{u}$ 可以互相替换。

2 子空间

我们来考察 $\mathbb{R}^2$ 上的两个子集:

1. $L_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$。
2. $L_2 = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$。

显然 L_1, L_2 都是 $\mathbb{R}^2$ 的子集，但是对于定义的两种运算上:

- L_1 对于加法和数乘运算是封闭的。
- L_2 对于加法和数乘运算不是封闭的。

更进一步可以发现，L_1 上的加法和数乘运算满足线性空间的所有性质，从而 L_1 也是 $\mathbb{R}$ 上的**线性空间**。这给了我们一种构造线性空间的方法，即寻找线性空间的子集，使得这个子集对于线性空间的运算是封闭的，这样的子集被称为**子空间**。下面我们给出正式的定义:

定义 2.1 (子空间 (Subspace))

给定一个向量空间 V，如果 W 是 V 的一个**非空子集**，并且 W 满足如下两个条件：

1. 对于任意的 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$，$\mathbf{u}+\mathbf{v}\in W$。
2. 对于任意的 $c\in\mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u}\in W$，$c\mathbf{u}\in W$。

则称 W 是 V 的一个子空间。

下面定理告诉我们，子空间也是一个线性空间：

定理 2.2

如果 W 是向量空间 V 的一个子空间，则 W 对于 V 上定义的加法和数乘运算构成一个向量空间。

证明： 只需验证 W 上的加法和数乘运算满足线性空间的所有条件即可。 □

我们同样给出一些子空间的例子：

- 考察如下集合：

$$\mathcal{W}=\{(x,y,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$$

  则子集 $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个子空间，原因在于：

  - 对于任意的 $\mathbf{u}=(x_1,y_1,0),\mathbf{v}=(x_2,y_2,0)\in\mathcal{W}$，$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(x_1+x_2,y_1+y_2,0)\in\mathcal{W}$。
  - 对于任意的 $c\in\mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u}=(x,y,0)\in\mathcal{W}$，$c\mathbf{u}=(cx,cy,0)\in\mathcal{W}$。

  并且不难验证，$\mathcal{W}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间。

- 考察如下由所有的 $n\times n$ 矩阵中的对角矩阵组成的集合：

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{R}):=\{A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\mid A=\operatorname{diag}(x_1,\ldots,x_n)\}.$$

  则 $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的一个子空间，同样其也是一个 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

子空间的一些性质: 我们下面介绍子空间 上的一些普遍性质。

引理 2.3

如果 $\mathcal{W}$ 是线性空间 $\mathcal{V}$ 的一个子空间，则 $\mathbf{0}\in\mathcal{W}$.

证明： 取 $\mathbf{w}\in\mathcal{W}$，$0\mathbf{w}=\mathbf{0}\in\mathcal{W}$. □

引理 2.4

令 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{W}$，则所有 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 的线性组合 $c\mathbf{u}+d\mathbf{v}$ 均在 $\mathcal{W}$ 中。

证明： 由子空间的定义，对于任意的 $c, d \in \mathbb{R}$，均有：

$$c\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{v} \in \mathcal{W}$$

从而：

$$c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v} \in \mathcal{W}$$

□

引理 2.5

令 $\mathcal{V}$ 是一个线性空间，$\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个子集。则 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个子空间当且仅当：对于任意的 $k \geqslant 0$，$c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathcal{W}$ 均有：

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \in \mathcal{W}$$

特别的，当 $k = 0$ 时我们令上述和为 $\boldsymbol{0}$.

证明： 充分性是显然的，直接可由定义得到；必要性可通过引理2.4进行归纳得到。 □

2.1 如何生成一个子空间？

注 2.6

在后续的讨论中，**我们会省略掉"在 $\mathbb{R}$ 上的线性空间"，而简单的称为是"线性空间"或者"向量空间"。这是因为在本课程的学习中，我们暂时不会涉及到其他数域上的线性空间；同时，当前后文没有歧义的时候，也会经常这么直接表示。**

由前面的讨论可以知道，给定一个线性空间 $\mathcal{V}$ 和其上的一个非空子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$，$\mathcal{S}$ **不一定是一个子空间，当然也不是一个线性空间。** 所以我们会产生如下的一个问题：

问题

如何从一个线性空间 $\mathcal{V}$ 的一个非空子集 $\mathcal{S}$ 生成一个包含 $\mathcal{S}$ 的子空间？

事实上，这个问题的答案非常简单，我们只需要包含 $\mathcal{S}$ 中的元素的所有线性组合即可。我们定义如下的操作 $\text{span}(\cdot)$:

$$\text{span}(\mathcal{S}) := \{c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \mid k \geqslant 0,\ c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathcal{S}\}$$

由于运算的封闭性，显然 $\text{span}(\mathcal{S})$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个子集。下面的定理进一步说明了，$\text{span}(\mathcal{S})$ 还是一个 $\mathcal{V}$ 中包含 $\mathcal{S}$ 的一个最小子空间：

定理 2.7

令 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$，则 span($\mathcal{S}$) 是 $\mathcal{V}$ 的包含 $\mathcal{S}$ 的最小子空间，即：

1. span($\mathcal{S}$) 是 $\mathcal{V}$ 的子空间。
2. 令 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ 是一个 $\mathcal{V}$ 的子空间，且 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{W}$，则 span($\mathcal{S}$) $\subseteq \mathcal{W}$。

证明： 由引理2.5可知，span($\mathcal{S}$) 是 $\mathcal{V}$ 的子空间；对于第二点，只需要注意到 $\mathcal{W}$ 也是个线性空间，其对加法和数乘运算是封闭的，从而 span($\mathcal{S}$) $\subseteq \mathcal{W}$。 □

例 2.8

考察 $\mathbb{R}^3$ 上的如下集合：

1. $\mathcal{S}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$。
2. $\mathcal{S}_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$。
3. $\mathcal{S}_3 = \{(x,y,z) \mid x \leqslant y,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$。

则我们有：

1. $\text{span}(\mathcal{S}_1) = \{\lambda(1,0,0)+\mu(0,1,0) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$。
2. $\text{span}(\mathcal{S}_2) = \{\lambda(1,0,0)+\mu(0,1,0)+\eta(0,0,1) \mid \lambda,\mu,\eta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$。
3. 注意到：

$$\begin{aligned}(0,1,0),(0,0,1) &\in \mathcal{S}_3 \\ 1(1,2,0)+(-1)(0,2,0) = (1,0,0) &\in \text{span}(\mathcal{S}_3)\end{aligned}$$

从而 $\text{span}(\mathcal{S}_3) = \text{span}(\mathcal{S}_2) = \mathbb{R}^3$。

并且可以很轻松的验证对所有的 i，$\mathbb{R}^3$ 包含 $\mathcal{S}_i$ 的最小子空间为 span($\mathcal{S}_i$)。

矩阵 A 上的线性空间： 下面这部分没有出现在课本上，但这会是我们理解矩阵与解方程组起到非常重要的作用，因此请各位同学一定要记住这部分内容。给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，我们可以写成如下的形式：

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

其中每个 $\mathbf{a}_i$ 是一个 $m \times 1$ 的列向量，我们称其为**矩阵 A 的列向量**，进而可以定义如下的集合：

1. A 的列空间 $\mathbf{C}(A)$：

$$\mathbf{C}(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

即 $\mathbf{C}(A)$ 是所有由**A 的列向量的线性组合而成的集合**。

2. A 的零空间 $\mathbf{N}(A)$:

$$\mathbf{N}(A) = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

即 $\mathbf{N}(A)$ 是**所有使得 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的 $\mathbf{x}$ 的集合。**

3. A 的行空间 $\mathbf{C}(A^{\mathrm{T}})$: 我们用$A^{\mathrm{T}}$ **的列空间** 来定义 A 的行空间[2]。

4. A 的左零空间 $\mathbf{N}(A^{\mathrm{T}})$: 我们用$A^{\mathrm{T}}$ **的零空间** 来定义 A 的左零空间。

例 2.9

给定如下的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{和其转置矩阵} \quad A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

则:

1. 其列空间 $\mathbf{C}(A)$ 为:

$$\mathbf{C}(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\} = \text{span}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}\right\}\right) = \text{span}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

2. 其零空间 $\mathbf{N}(A)$ 为:

$$\mathbf{N}(A) = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \text{span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

3. 其行空间 $\mathbf{C}(A^{\mathrm{T}})$ 为:

$$\mathbf{C}(A^{\mathrm{T}}) = \{A^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\} = \text{span}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}\right\}\right) = \text{span}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

4. 其左零空间 $\mathbf{N}(A^{\mathrm{T}})$ 为:

$$\mathbf{N}(A^{\mathrm{T}}) = \{\mathbf{x} \mid A^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \text{span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

不难验证，$\mathbf{C}(A^{\mathrm{T}}), \mathbf{N}(A)$ 都是$\mathbb{R}^n$ **的子空间**，$\mathbf{C}(A), \mathbf{N}(A^{\mathrm{T}})$ 都是$\mathbb{R}^m$ **的子空间**:

[2]这样定义的方法保证了尽管想从行向量去进行考虑，但形式上依旧是列向量。

定理 2.10

令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，则:

1. $\mathbf{C}(A)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。
2. $\mathbf{N}(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。
3. $\mathbf{C}(A^T)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。
4. $\mathbf{N}(A^T)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。

这四个空间与方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解有着密切的联系，在本节的最后我们仅仅展示一个例子:

定理 2.11

令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$，则:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ 有解当且仅当 } \mathbf{b} \in \mathbf{C}(A).$$

证明：令矩阵 A 的列向量为 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$，则:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b}\text{有解} &\Leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \text{使得}\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n. \\ &\Leftrightarrow \mathbf{b} \in \text{span}(\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{b} \in \mathbf{C}(A) \end{aligned}$$

□