线性代数 (V)

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 2 月 17 日

1 线性相关与线性无关

考察 $\mathbb{R}^3$ 上的如下四个向量:

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad ,\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

- 对于 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ 来说，我们可以用其中两个向量的线性组合来表示另一个向量，如:

$$\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2.$$

- 对于 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_4$ 来说，我们无法用其中两个向量的线性组合来表示另一个向量，换句话说:

$$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+c_4\boldsymbol{v}_4=\boldsymbol{0}\quad \text{当且仅当}\quad c_1=c_2=c_4=0.$$

我们将上述第一种这样可以互相表示的一组向量称为**线性相关** 的，而第二种这样无法用其中某些向量的线性组合来表示的一组向量称为**线性无关** 的。

为了方便叙述，**在后面的讨论中，如果没有明确指明，则我们固定一个在 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 V 进行讨论**。我们称 V 上的一组向量 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ 为一个**向量组**。下面给出线性无关和线性相关正式的定义:

定义 1.1（线性无关 (Linearly Independent)）

给定一个向量组 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$。如果对于任意的 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$，当且仅当 $c_1=\cdots=c_n=0$ 时有:

$$c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0}$$

则称 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ 是线性无关的。

定义 1.2（线性相关 (Linearly Dependent)）

给定一个向量组 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$。如果存在 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ 满足至少一个 $c_i\neq 0$，使得:

$$c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0}$$

则称 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ 是线性相关的。

一些例子：我们给出一些例子来进一步理解这两个概念。

例 1.3

考察 $\mathbb{R}^3$ 上的一些向量：

1. $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ 是**线性无关** 的。
2. $\{(1,0,0),(1,1,0)\}$ 是**线性无关** 的。
3. $\{(2,2,0),(1,1,0)\}$ 是**线性相关** 的。
4. $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ 是**线性相关** 的。

例 1.4

我们再给出两个特殊的例子：

1. 只包含一个非零向量 $\boldsymbol{v}$ 的向量组是**线性无关** 的，因为：

$$c\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \quad \text{当且仅当} \quad c=0.$$

2. 如果一个向量组 $\boldsymbol{v}_1,\dots\boldsymbol{v}_n$ 包含 $\boldsymbol{0}$(不妨令为 $\boldsymbol{v}_1$)，则该向量组是**线性相关** 的，这是因为：

$$c\boldsymbol{v}_1(=\boldsymbol{0})+0\boldsymbol{v}_2+\cdots+0\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0} \quad \text{对任意 } c\in\mathbb{R} \text{ 都成立。}$$

线性相关和线性无关性的一些性质：我们首先给出关于这两个性质的一些刻画：

定理 1.5

给定一个向量组 $\mathcal{A}=\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$：

1. 若 $\mathcal{A}$ 是线性无关的，则 $\mathcal{A}$ 的任何一个子集都是**线性无关** 的。
2. 向量组 $\mathcal{A}$ 是线性相关的当且仅当至少有一个 $\boldsymbol{v}_i$ 可以表示成其余向量的线性组合。

证明：

1. 反设存在 $\mathcal{A}'=\{\boldsymbol{v}_{i_1},\dots,\boldsymbol{v}_{i_k}\}\subseteq\mathcal{A}$ 是线性相关的，则存在不全为 0 的 $c_1,\dots,c_k$ 使得：

$$c_1\boldsymbol{v}_{i_1}+\cdots+c_k\boldsymbol{v}_{i_k}=\boldsymbol{0}.$$

   则令：

$$c_i'=\begin{cases} c_i, & i\in\{i_1,\dots,i_k\},\\ 0, & i\notin\{i_1,\dots,i_k\},\end{cases}$$

   则有：

$$c_1'\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n'\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0}.$$

   与 $\mathcal{A}'$ 是线性无关的矛盾。

2. $(\Rightarrow)$ 若 $\mathcal{A}$ 是线性相关的，则存在不全为 0 的 $c_1,\dots,c_n$ 使得：

$$c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0}.$$

不妨设 $c_1 \neq 0$，则有:

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{v}_2 - \cdots - \frac{c_n}{c_1}\boldsymbol{v}_n.$$

($\Leftarrow$) 若至少有一个 $\boldsymbol{v}_i$ 可以表示成其余向量的线性组合，不妨设 $\boldsymbol{v}_1$ 可以表示成其余向量的线性组合，则存在 $c_2, \ldots, c_n$ 使得:

$$\boldsymbol{v}_1 = c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n. \quad \Longrightarrow \quad 1\boldsymbol{v}_1 + (-c_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (-c_n)\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}.$$

□

下面的定理说明，**矩阵 A 上的列向量组** 是否线性相关决定了对应方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 解的情况:

定理 1.6

给定一个矩阵 A，则:

1. 其列向量是线性无关的当且仅当方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有唯一解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$。
2. 其列向量是线性相关的当且仅当方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解。

证明： 令 A 表示为:

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}.$$

则 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 可以表示为:

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}.$$

1. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 是线性无关的当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n = 0$，即方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有唯一解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$。
2. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 是线性相关的当且仅当存在不全为 0 的 $c_1, \ldots, c_n$ 使得:

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}.$$

则 $\boldsymbol{x} = (c_1, \ldots, c_n)$ 为方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的非零解。

□

2 线性空间的基和维度

回顾由子集 $S \subseteq V$ 生成的子空间:

$$\mathrm{span}(S) = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \mid k \geqslant 0,\ c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in S\}$$

由之前的讨论可知，**$\mathrm{span}(S)$ 是一个线性空间**。进一步的，我们称$\mathrm{span}(S)$ 这个线性空间是由 S 生成的。下面是一个正式的定义:

定义 2.1

给定一个向量集合 $S \subseteq V$[a]和向量空间 $\mathcal{V}$，如果 $\mathcal{V} = \text{span}(S)$，则称 S 生成了向量空间 $\mathcal{V}$。

[a]这里请大家再次注意，我们后面的讨论都是假定在一个线性空间 V 下进行讨论的，和定义后面的 $\mathcal{V}$ 并不相同。

一些例子: 下面我们给出一些例子来进行理解。

例 2.2

$\mathcal{V}_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个子空间，从而也是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间，考察如下 $\mathbb{R}^3$ 上的一些向量组:

- $S_1 = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.
- $S_2 = \{(1, 1, 0), (2, 0, 0)\}$.
- $S_3 = \{(1, 1, 0), (0, 4, 0), (1, 1, 0)\}$.
- $S_4 = \{(x, y, 0) \mid x \leqslant y,\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

不难验证:

$$\mathcal{V}_1 = \text{span}(S_1) = \text{span}(S_2) = \text{span}(S_3) = \text{span}(S_4).$$

即 $S_1, \cdots, S_4$ 都生成了 $\mathcal{V}_1$。

例 2.3

考察 3×3 实矩阵组成的线性空间 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ 上的一些向量组 (即一些 3×3 的矩阵):

1. 令: $L_1 = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\}$，则 L_1 生成的向量空降为:

$$\text{span}(L_1) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

即所有 3×3 的实对角矩阵 $\text{diag}(a, b, c)$ 组成的线性空间 $\mathcal{D}_3$。

2. 令 $L_2 = \{M_1, \ldots, M_9\}$，其中 $M_1, \ldots, M_9$ 分别为:

$$M_i(j, k) = \begin{cases} 1, & j = i/3,\ k = i\%3, \\ 0, & \text{其他情况}. \end{cases}$$

即 $\{M_i\}_{i\in[9]}$ 遍历了所有的 3×3 只有一个位置为 1 其余都为 0 的实矩阵。不难验证:

$$\text{span}(L_2) = \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

即 L_2 生成了 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$。

线性空间的基:上述两个例子说明,不同的向量组可能生成同样一个空间,比如在例子中,尽管 S_1, S_2, S_3, S_4 都生成了 $\mathcal{V}_1$，但其各不相同。进一步的可以发现:

1. S_1, S_2 只有 2 个元素。
2. S_3 有 3 个元素。
3. S_4 有无穷多个元素。

所以一个很自然的问题是:

问题 2.4

给定一个线性空间 $\mathcal{V}$，我们需要一个多大的集合 S 才能够生成 $\mathcal{V}$?

我们当然希望用来生成的 S 越小越好，一个很直观的发现是，如果 S 中有些向量是可以用其他向量的线性组合来表示的，那么这些向量就是多余的，具体来说，比如对于 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$，如果存在**不全为 0 的** $c_2, \ldots, c_n$ 使得:

$$\boldsymbol{v}_1 = c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n,$$

则:

$$\text{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \text{span}(\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n).$$

这样的向量 $\boldsymbol{v}_1$ 就是多余的。所以我们总可以减少 S 中的元素是的最终集合 S' 应该是**线性无关** 的。我们也称 $S' \subseteq$ 是 S 一个**最大无关组**，其满足:

1. S' 是线性无关的。
2. S 中的任意一个向量都可以用 S' 中的向量的线性组合来表示。

这也就说明 $\text{span}(S') = \text{span}(S)$。事实上从生成线性空间的角度来说,我们将这个 S 称为$\mathcal{V}$ **的基 (basis)**, S 的元素个数称为$\mathcal{V}$ **的维度**，从而我们可以给出如下的两个定义:

定义 2.5（线性空间的基 (A Bssis for a Vector Space))

一组向量 S 是一个线性空间 $\mathcal{V}$ 的基 如果其满足:

1. S 是**线性无关**的。
2. S **生成了** $\mathcal{V}$，即 $\text{span}(S) = \mathcal{V}$。

定义 2.6（维度 (Dimension))

向量空间 $\mathcal{V}$ 的维度，记作 $\dim(V)$, 是指 V 的一个基中的向量个数。

一些例子：我们先来看一些例子来帮助理解。

例 2.7

1. 在例子2中：

   (1) S_1, S_2 是**线性无关的**。

   (2) S_3, S_4 是**线性相关的**。

   从而 S_1, S_2 是 $\mathcal{V}_1$ 的基，而 S_3, S_4 不是 $\mathcal{V}_1$ 的基，并且：

$$|S_1| = |S_2| = 2 \quad \Longrightarrow \quad \dim(\mathcal{V}_1) = 2.$$

2. 在例子2.3 中 L_1 和 L_2 是**线性无关的**。从而：

   - L_1 是 $\mathcal{D}_3$ 的基，并且 $\dim(\mathcal{D}_3) = |L_1| = 3$。
   - L_2 是 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ 的基，并且 $\dim(\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})) = |L_2| = 9$。

线性空间 Z: 回顾只有一个元素的线性空间 Z:

$$Z = \{0\}.$$

我们有

定理 2.8

$\dim(Z) = 0$，即**Z 不需要任何向量就可以生成。**

证明： 其中的关键在于：

$$\sum_{v \in \emptyset} v = 0.$$

注意到**加法是可交换的**，令 T 是一个有限的向量集，考察 T 的一个划分：

$$T = T_1 \cup T_2,\ \text{其中}\ T_1, T_2\ \text{满足：}\ T_1 \cap T_2 = \emptyset,\ T_1 \cup T_2 = T$$

则我们有：

$$\sum_{v \in T} v = \sum_{v \in T_1} v + \sum_{v \in T_2} v$$

显然有：

$$\sum_{v \in T} v = \sum_{v \in \emptyset} v + \sum_{v \in T} v$$

从而：

$$\sum_{v \in \emptyset} v = \sum_{v \in T} v - \sum_{v \in T} v = 0$$

□

线性空间 $\mathbb{R}^\infty$: 回顾之前提到的 $\mathbb{R}^\infty$，即由函数组成的线性空间 F:

$$F = F(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$$

其中:

- 给定 $f_1, f_2 \in F$，定义函数 $f_1 + f_2 : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ 为:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

- 对于任意的 $f \in F$ 和 $c \in \mathbb{R}$，定义函数 $cf : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 为:

$$(cf)(x) = cf(x)$$

我们有:

定理 2.9

$\dim(F) = \infty$，即F **需要无穷多个向量来生成。**

证明: 事实上，对于任意的 $i \in \mathbb{N}$，定义:

$$f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x = i \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

则对于任意的 $n \in \mathbb{N}$，我们有:

$$f_0, f_1, \ldots, f_n$$

是**线性无关** 的。 □

注 2.10

定理2.9说明，存在线性空间 $\mathcal{V}$，其维度**是无限的**，我们称 $\mathcal{V}$ 是无限维的；同样的，如果线性空间 $\mathcal{V}$ 存在一个有限大小的基，则称 $\mathcal{V}$ 是有限维的[a]。

[a]本课程主要关注的还是有限维的线性空间。

遗留的一个问题: 目前看上去一切都很好，但事实上我们还有一个问题没有解决，回顾例子2中的 $\mathcal{V}_1$，我们发现:

- S_1, S_2 作为**不同的集合**，其都是 $\mathcal{V}_1$ 的基。

这就产生一个问题，**线性空间的基在不唯一的**情况下，**其维度是否还能这样定义？** 或者说，会不会存在一个线性空间 $\mathcal{V}$,其有两个不同的基,并且他们的大小不同?这会导致我们对维度的定义2.6**不是一个好定义**。

注

这一部分的说明主要是为了整个体系的完备性，事实上，如果只是运用，我们只需要知道任何线性空间的基其个数都是相同的即可。但尽管我们的课程是面向基础介绍的，我们还是能够希望大

家能对整个逻辑有一个严格清晰的刻画，因此我们补上了这一块的原因。因此，在一部分的知识补充完毕后，应该可以认识到：

1. **一个线性空间的基**可以有无数多个，但每组基的个数是相同的，这也是为什么可以定义维度这个概念。
2. **一个线性空间的基**实际上就是这个线性空间中可以构造出的最大的线性无关的向量组。

幸运的是，我们不必为此担心，下面的**Steinitz 交换引理** 能消除这个问题：

定理 2.11 (Steinitz Exchange Lemma)

令 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 是线性空间 $\mathcal{V}$ 的一个基，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个线性无关的向量组，其中 $1 \leqslant m \leqslant n$。则存在 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-m} < n$，使得 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{n-m}}$ 是 V 的一组基。[a]

[a] $m = 0$ 时，上述引理是平凡的。

在完成 Steinitz 交换引理的证明之前，我们先来看其如何回答上面的问题：

推论 2.12

给定一个线性空间 $\mathcal{V}$，并且 $\dim(V) = n$，则：

1. 若 $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ 也是 $\mathcal{V}$ 的一组基，则 $n = m$。
2. 若 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in \mathcal{V}$ 是线性无关的，则 $m \leqslant n$。
3. 若 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathcal{V}$ 是线性无关的，则 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 是 V 的一组基。

证明： 令 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathcal{V}$ 的一组基：

1. 反设 $m \neq n$，由对称性不妨令 $m < n$，则由 Steinitz 交换引理：
$$\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m, \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{n-m}}$$
是 $\mathcal{V}$ 的一组基，从而其是**线性无关的**。另一方面，由于 $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ 也是 $\mathcal{V}$ 的一组基，$\boldsymbol{e}_{i_{n-m}} \in \mathcal{V}$，从而存在不全为 0 的 $c_1, \ldots, c_m$ 使得：
$$\boldsymbol{e}_{i_{n-m}} = c_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{f}_m,$$
从而 $\boldsymbol{e}_{i_{n-m}}$ 可以由 $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ 的线性组合表示，与其是线性无关的矛盾。
2. 反设 $m > n$，则由 Steinitz 交换引理：
$$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \text{ 是 } \mathcal{V} \text{ 的一个基},$$
从而对 $n + 1 \leqslant m$ 来说，存在不全为 0 的 $c_1, \ldots, c_n$ 使得：
$$\boldsymbol{v}_{n+1} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n,$$
与 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ 是线性无关的矛盾。

3. 在 Steinitz 交换引理中直接令 $m = n$ 即可。

$\square$

现在让我们回到**Steinitz 交换引理** 的证明:

证明: [Steinitz 交换引理的证明] 我们对 m 使用归纳法。

$m = 1$ 的情况:

由于 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ 是 V 的一个基，从而存在 $c_1, \dots, c_n$ 使得:

$$\boldsymbol{v}_1 = c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n$$

显然 $\boldsymbol{v}_1 \neq \mathbf{0}$，从而存在 $c_i \neq 0$，因此我们有:

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{c_i}\boldsymbol{v}_1 - \frac{c_1}{c_i}\boldsymbol{e}_1 - \cdots - \frac{c_{i-1}}{c_i}\boldsymbol{e}_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i}\boldsymbol{e}_{i+1} - \cdots - \frac{c_n}{c_i}\boldsymbol{e}_n$$

即: $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{e}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n$ 是 V 的一组基。

我们还需要证明:

$$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_{n-m}}$$

是线性无关的。考察如下的线性组合:

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_{i-1}\boldsymbol{e}_{i-1} + c\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}$$

- 如果 $c = 0$，则由于 $\boldsymbol{e}_i$ 是线性无关的，从而 $c_1 = \cdots = c_{i-1} = c_{i+1} = \cdots = c_n = 0$。
- 如果 $c \neq 0$，由于 $\boldsymbol{v}_1 \neq \mathbf{0}$，从而 $\boldsymbol{v}_1$ 可以由 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{e}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n$ 的线性组合表示，从而 $\boldsymbol{e}_i$ 可以由 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{e}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n$ 的线性组合表示，矛盾。

归纳步骤:

假设命题对于 $\leqslant m-1$ 的情况成立，对于 $= m$ 的情况，令 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ 是线性无关的，注意到 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{m-1}$ 也是线性无关的，从而由归纳假设，存在 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{n-m+1} \leqslant n$，使得:

$$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{m-1}, \boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_{n-m+1}}$$

是 V 中的一组基。从而存在不全为 0 的 $c_1, \dots, c_{m-1}, d_1, d_2, \dots, d_{n-m+1}$ 使得:

$$\boldsymbol{v}_m = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_{m-1}\boldsymbol{v}_{m-1} + d_1\boldsymbol{e}_{i_1} + \cdots + d_{m-1}\boldsymbol{e}_{i_{n-m+1}}$$

注意到存在 $l \in [n-m+1]$ 使得 $d_l \neq 0$，从而:

$$\boldsymbol{e}_{i_l} = \frac{1}{d_l}\boldsymbol{v}_m - \frac{c_1}{d_l}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \frac{c_{m-1}}{d_l}\boldsymbol{v}_{m-1} - \frac{d_1}{d_l}\boldsymbol{e}_{i_1} - \cdots - \frac{d_{l-1}}{d_l}\boldsymbol{e}_{i_{l-1}} - \frac{d_{l+1}}{d_l}\boldsymbol{e}_{i_{l+1}} - \cdots - \frac{d_{n-m+1}}{d_l}\boldsymbol{e}_{i_{n-m+1}}$$

即: $\boldsymbol{e}_{i_l}$ 可以由 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_{l-1}}, \boldsymbol{e}_{i_{l+1}}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_{n-m+1}}$ 表示。

进一步可以验证:

$$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_{l-1}}, \boldsymbol{e}_{i_{l+1}}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_{n-m+1}}$$

是 V 的一组基，即归纳步骤成立，引理得证。 □

子空间的维度：回顾例子2.3中的线性空间 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ 和 $\mathcal{D}_3$，我们有：

1. $\mathcal{D}_3$ 是 $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ 的一个子空间。
2. $\dim(\mathcal{D}_3) = 3 < \dim(\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})) = 9$.

事实上，这一情况在**维度是有限的** 的情形下是成立的：

定理 2.13

给定一个向量空间 $\mathcal{V}$ 和其子空间 $\mathcal{W}$，**如果 $\dim(\mathcal{V})$ 是有限的，则 $\dim(\mathcal{W})$ 也是有限的**，并且：

$$\dim(\mathcal{W}) \leqslant \dim(\mathcal{V}).$$

证明： 令量空间 $\mathcal{V}$ 的维度 $\dim(\mathcal{V}) = n$，我们的目标是希望从 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ 中慢慢的扩展出一组基 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ 使得：

$$\text{span}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \mathcal{W}.$$

我们对 k 进行归纳构造。初始化 $k = 0$，此时 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 为空。

如果：

$$\mathcal{W} = \text{span}(\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}).$$

则构造已经完成，并且由 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathcal{V}$ 可知：

$$\dim(\mathcal{W}) = k \leqslant n = \dim(\mathcal{V}).$$

否则，存在 $\boldsymbol{v}_{k+1} \in W \setminus \text{span}(\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\})$ 使得：

$$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}$$

是**线性无关** 的。并且注意到 $\dim(\mathcal{V}) = n$，从而由 Steinitz 交换引理：

$$k + 1 \leqslant n.$$

□