线性代数 Week 6

线性代数 (VI)

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 4 月 8 日

1 矩阵的列秩与行秩

回顾在第四个讲义中所提到的，给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，其存在四个相关的线性空间：

1. A 的列空间 $\mathbf{C}(A)$：
$$\mathbf{C}(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$
即 $\mathbf{C}(A)$ 是所有由**A 的列向量的线性组合而成的集合**。
2. A 的零空间 $\mathbf{N}(A)$：
$$\mathbf{N}(A) = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = 0\}$$
即 $\mathbf{N}(A)$ 是**所有使得 $A\mathbf{x} = 0$ 的 $\mathbf{x}$ 的集合。**
3. A 的行空间 $\mathbf{C}(A^T)$：我们用**A^T 的列空间**来定义 A 的行空间
4. A 的左零空间 $\mathbf{N}(A^T)$：我们用**A^T 的零空间**来定义 A 的左零空间。

我们展现这些空间与矩阵 A 和方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的关系。我们还将回答在介绍矩阵时遗留下的问题：

问题 1.1

给定 n 阶方阵 A，如果方阵 B 满足 $AB = E$ 或者 $BA = E$，B 是否就是 A 的逆矩阵 A^{-1}？

让我们首先来关注**列空间与行空间的维数**。

矩阵的列秩：注意到矩阵 A 的列空间 $\mathbf{C}(A)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，所以自然有：

定理

$\dim \mathbf{C}(A) \leqslant m$.

我们同样还有：

定理 1.2

$\dim \mathbf{C}(A) \leqslant n$.

证明： 令 A 的列向量为 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$，则可以在其中选择一个子序列：

$$\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}$$

满足:

- $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.
- $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}$ 是线性无关的。
- k 是最大的。

则我们有:

$$\mathbf{C}(A) = \text{span}\{\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}\}$$

即:

$$\dim(\mathbf{C}(A)) = k \leqslant n$$

□

我们将其称为**矩阵 A 的列秩，记作 column-rank(A)**。

定义 1.3（列秩 (Column Rank)）

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，其列秩 (Column Rank) 定义为:

$$\text{column-rank}(A) = \dim(\mathbf{C}(A)).$$

例 1.4

考虑矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 9 & 18 \\ 7 & 8 & 15 & 30 \end{bmatrix}$$

则注意到:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \\ 30 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

从而:

$$\mathbf{C}(A) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \\ 30 \end{bmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}\right\}.$$

因此column-rank$(A) = \dim(\mathbf{C}(A)) = 2$.

上述两个列秩的界具有很直观的意义:

1. column-rank$(A) \leqslant m$：这是因为 $\mathbf{C}(A)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，所以其维数不会超过 m。
2. column-rank$(A) \leqslant n$：这是因为 $\mathbf{C}(A)$ 是由 A 的 n 个列向量生成的，所以其维数不会超过 n。

进一步，我们还有如下的性质:

定理 1.5

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，则其列秩为 m 当且仅当存在一个 $n \times m$ 的矩阵 B 使得:

$$AB = E.$$

证明: 只需注意到:

$$\begin{aligned}
\dim(\mathbf{C}(A)) = m &\iff \forall \boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{e}_i \in \mathbf{C}(A) \\
&\iff \forall \boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^m, \exists \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n, A\mathbf{b}_i = \boldsymbol{e}_i \\
&\iff \exists B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}, AB = E.
\end{aligned}$$

□

上述定理的一个自然推论是:

推论 1.6

如果 n 阶方阵 A 是可逆的，则其列秩为 n。

关于问题1.1的进一步思考 : 我们来考虑推论1.6的逆命题:

问题 1.7

如果 n 阶方阵 A 的列秩为 n，则 A 是否一定是可逆的?

注意到对于一个 n 阶方阵 A，由定理1.5我们还可以得到:

推论 1.8

如果 n 阶方阵 A 的列秩为 n，则对任意的 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$，方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有**唯一**解。

证明: 由 A 的列向量线性无关即得。 □

因此，问题1.7实际上问的是，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的唯一解是否可以表示为:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

注意到我们已经知道如下的结论:

- 如果存在 n 阶方阵 B, C 使得 $AB = CA = E$，则 A 是可逆的，并且 $A^{-1} = B = C$。
- column-rank$(A) = n$ 当且仅当存在 n 阶方阵 B 使得 $AB = E$。

所以如果可以完成:

接下来的目标

column-rank$(A) = n$ 当且仅当存在 n 阶方阵 B 使得 $BA = E$。

那么我们便可以同时对问题1.1和问题1.7给出肯定的回答。

矩阵的行秩. 注意到:

$$AB = E \iff (AB)^T = E^T \iff B^T A^T = E.$$

我们可以尝试从行空间的角度找到左乘的矩阵 B。

定义 1.9（行秩 (Row Rank)）

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，其行秩 (Row Rank) 定义为:

$$\text{row-rank}(A) = \dim(\mathbf{C}(A^T)).$$

例 1.10

依旧考虑矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 9 & 18 \\ 7 & 8 & 15 & 30 \end{bmatrix}$$

其转置矩阵为:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 15 \\ 6 & 18 & 30 \end{bmatrix}$$

则注意到:

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 15 \\ 30 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

从而:

$$\mathbf{C}(A) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 15 \\ 30 \end{bmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \\ 18 \end{bmatrix}\right\}.$$

因此$\underline{\text{row-rank}(A) = \dim(\mathbf{C}(A^T)) = 2}$.

由矩阵转置的性质和列空间、行空间的定义，自然有:

定理 1.11

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，则下述叙述是等价的:

1. $\text{row-rank}(A) = n$.

2. column-rank$(A^T) = n$.
3. 存在一个 $m \times n$ 的矩阵 B 使得 $A^T B = E$.
4. 存在一个 $n \times m$ 的矩阵 C 使得 $BA = E$.

所以如果进一步有:

$$\text{row-rank}(A) = \text{column-rank}(A)$$

则意味着:

$$\text{row-rank}(A) = \text{column-rank}(A) = n \iff \exists B, C\text{使得}AB = E\text{且}BA = E.$$

事实上，这件事是成立的:

定理 1.12

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，则 row-rank(A) = column-rank(A).

我们将给出两个证明，一个**基于解方程组**的证明，而一个则更具有**技巧性**。**在本节中，我们将首先关注于一个特殊情况，即 $m = n$ 并且 column-rank$(A) = n$ 的情况。**。注意到对于方程 $Ax = \mathbf{b}$，我们有:

命题 1.13

令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，并且将 A 表示成如下列向量的形式:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^m$，则有:

1. 对任意的 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$,
$$Ax = \mathbf{b}\text{有解} \iff \mathbf{b} \in \mathbf{C}(A)$$
从而$Ax = \mathbf{b}$ **对任意** $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ **都有解**当且仅当 $\mathbf{C}(A) = \mathbb{R}^m$，即 column-rank$(A) = m$.
2. 存在 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 使得 $Ax = \mathbf{b}$ 存在两个不同的解 x_1, x_2 当且仅当$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ **线性相关**。
3. $Ax = \mathbf{b}$ 对任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 都有**唯一解**当且仅当:
$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\text{是 } \mathbb{R}^m \text{ 的一组基}$$
特别的，$m = n$.

注意到，这也可以被认为是**为什么只针对方阵 A 才考虑逆矩阵** 的一个原因，因为如果能写成$x = A^{-1}\mathbf{b}$ 的唯一形式，$m = n$ 是必须的。

下面我们将通过解方程的方式进一步回答:

引理 1.14

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面叙述是等价的:

1. A 是可逆的。
2. 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 都有唯一解.
3. column-rank$(A) = \dim(\mathbf{C}(A)) = n$.
4. row-rank$(A) = \dim(\mathbf{C}(A^T)) = n$.
5. 存在矩阵 B 使得 $AB = E$。
6. 存在矩阵 C 使得 $CA = E$。
7. A 有 n 个首元。

并给出其**逆矩阵 A^{-1} 的一个求法**: 利用 **Gauss-Jordan 消元法**。

2 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 中 A 为方阵的 Gauss-Jordan 消元法

这一节我们讨论**方程组个数和方程组变元相同**的这一特殊的方程组的求解,即从矩阵的角度来看,**A 是一个方阵。** 我们首先回顾一下解方程的基本方法: **Gauss 消元法**。对于一个线性方程组的求解过程:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\
4x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= 8 \\
-2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 10
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\
1x_2 + x_3 &= 4 \\
4x_3 &= 8
\end{aligned}
$$

或者写成矩阵的形式:

$$
\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}
\tag{1}
$$

$$
A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad\qquad\qquad U\mathbf{x} = \mathbf{c}
\tag{2}
$$

我们称过程中**用作第一个做其他行消去的非零元素**为首元。在完成消去后, **首元在对角线上**。

注 2.1 (首元的个数)

不难发现, 首元的个数至多为**变量的个数**和**方程的个数**中的较小者, 即$\min\{m, n\}$, 在本节讨论的特殊情况, 即 $m = n$ 时, 首元的个数至多为 n。

首元的个数会影响**方程组的解的情况**。

1. 首元的个数 $= n$ 时, 方程组有唯一解, 如下所示:

$$
\begin{aligned}
x - 2y &= 1 \\
3x - 5y &= 11
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
x - 2y &= 1 \\
y &= 8
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
x &= 17 \\
y &= 8
\end{aligned}
$$

2. 首元的个数 $< n$ 时，方程组有无穷多解或者无解:

- $$\begin{aligned} x-2y&=1 \\ 3x-6y&=11 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x-2y&=1 \\ 0y&=8 \end{aligned}$$ **无解**。

- $$\begin{aligned} x-2y&=1 \\ 3x-6y&=3 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x-2y&=1 \\ 0y&=0 \end{aligned}$$ **有无数解**。

等式1的过程 ($Ax = \mathbf{b} \Rightarrow Ux = \mathbf{c}$) 可以概括为:

1. 通过第一个方程上的第一个首元将所有后续方程对应位置上的系数全部变成 0。
2. 通过新的第二个方程上的第二个首元将所有后续方程对应位置上的系数全部变成 0。

3-n. 重复以上操作找到 n 个首元，最终得到了一个上三角形的矩阵 U。

我们还需注意如下的情况:

$$\begin{aligned} -2y+z&=1 \\ 3x-6y+z&=11 \\ 2x-y+z&=3 \end{aligned}$$

注意到第一个方程并没有 x 的项，因此我们有的时候需要**调换两个方程的位置** 来确保这一方法可执行下去:

$$\begin{aligned} -2y+z&=1 \\ 3x-6y+z&=11 \\ 2x-y+z&=3 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x-6y+z&=11 \\ -2y+z&=1 \\ 2x-y+z&=3 \end{aligned}$$

高斯消元法的矩阵形式. 在第一次介绍解方程时，已经介绍并展示了一些**消元矩阵**(或者**初等矩阵**)。现在我们再来重新思考一下将上述过程用矩阵的方式进行表述的过程。在上述的过程中，可能存在如下的两个步骤:

1. 将第 j 行的 k 倍加到第 i 行上消去某个变元。
2. 将某两行方程互换位置。

我们可以用下列的矩阵 $E_{ij}(k)$ 来表示步骤1.:

$$E_{ij}(k) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + ka_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

即$E_{ij}(k)A$ 起到的效果是将第 j 行的 k 倍加到第 i 行上。**特别的，当我们不关心 k 的值的时候，我们用E_{ij} 来表示这一类矩阵。**

步骤2.可以用如下的矩阵表示：

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

即$P_{ij}A$ 起到的效果是将第 i 行和第 j 行互换位置。

注 2.2

左乘和右乘有着截然不同的意义：

1. $AE_{ij}(k)$ 表示为将 A 的第 j 列的 k 倍加到第 i 列上，即：

$$AE_{ij}(k) = \begin{bmatrix} a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots, a_n \end{bmatrix} E_ij(k) = \begin{bmatrix} a_1, \cdots, a_i + ka_j, \cdots, a_j, \cdots, a_n \end{bmatrix}.$$

2. AP_{ij} 表示为将 A 的第 i 列和第 j 列互换位置，即：

$$AP_{ij} = \begin{bmatrix} a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots, a_n \end{bmatrix} P_{ij} = \begin{bmatrix} a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots, a_n \end{bmatrix}.$$

矩阵 $E_{ij}(k)$ 和 P_{ij} 的逆矩阵具有非常简单的形式：

引理 2.3

对于 $E_{ij}(k)$ 和 P_{ij}，有：

1. $E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$.
2. $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.

证明：[直观，非严格证明] 我们给出两个直观来帮助理解：

1. 对于 $E_{ij}(k)$ 左乘的作用是将第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，而 $E_{ij}(-k)$ 的作用是将第 j 行的 k 倍加到第 j 行上，因此 $E_{ij}(k)E_{ij}(-k) = E$。
2. 对于 P_{ij} 左乘的作用是将第 i 行和第 j 行互换位置，因此再互换一次便变回原来的矩阵，从而 $P_{ij}P_{ij} = E$。

□

回到我们最开始的方程组，其求解过程为:

$$\begin{aligned} 2x_1+4x_2-2x_3 &= 2 \\ 4x_1+9x_2-3x_3 &= 8 \\ -2x_1-3x_2+7x_3 &= 10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2x_1+4x_2-2x_3 &= 2 \\ x_2+x_3 &= 8 \\ x_2+5x_3 &= 10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2x_1+4x_2-2x_3 &= 2 \\ x_2+x_3 &= 4 \\ 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

即:

1. 将第一个方程的 -2 倍加到第二个方程上去。
2. 将第一个方程的 1 倍加到第三个方程上去。
3. 将第二个方程的 -1 倍加到第三个方程上去。

用矩阵的语言来表示，即:

$$E_{32}(-1)E_{31}(1)E_{21}(-2)A = U$$

即:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

注 2.4 (矩阵的 LU 分解)

我们也可以将上式写成如下的形式:

$$\begin{aligned} & E_{21}(2)E_{31}(-1)E_{32}(1)E_{32}(-1)E_{31}(1)E_{21}(-2)A = E_{21}(-2)E_{31}(-1)E_{32}(1)U \\ \Longrightarrow \quad & A = E_{21}(2)E_{31}(-1)E_{32}(1)U \end{aligned}$$

而:

$$E_{21}(2)E_{31}(-1)E_{32}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

是一个**下三角矩阵** L，从而我们将 A 变成了**一个下三角矩阵** L 和**一个上三角矩阵** U 的乘积 ($A = LU$)，这就是**矩阵的** LU **分解**。

再次回顾上述这个过程，假设其没有行交换的情况下，消元的过程总可以表示成:

1. 用第一个方程依次消去后面的方程中的第一个变元。
2. 用第二个方程依次消去后面的方程中的第二个变元。

3-n. 重复以上操作，直到最后一个方程。

因此，对于一个 $n \times n$ 的矩阵 A，如果 **有** n **个首元**，并且**消元过程不需要进行行交换**，其对应的方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 对应的消元过程总可以表示为:

$$E_{n(n-1)}E_{n(n-2)}E_{(n-1)(n-2)} \cdots E_{31}E_{21}A = U$$

即：

$$A = E_{21}E_{31}\cdots E_{(n-1)(n-2)}E_{n(n-2)}E_{n(n-1)}U = LU$$

不难验证，这里的 L 是一个下三角矩阵。

如果存在行变换怎么办？ 直观上说，我们总可以预先通过一些行变换使得在接下来的消元过程中不再需要行变换，因此对于一般的有 n 个首元的 n 阶方阵 A 来说，我们可以将其写成：

$$PA = LU$$

的形式，其中 P 是一个**置换矩阵**。

上述例子中的消元过程是**不需要行交换的**，但一般情况下在消元过程中可能存在行交换，如下例所示：

$$\begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 2z &= 4 \\ 3x+2y &= 11 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 2z &= 4 \\ 8y+18z &= 8 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 8y+18z &= 8 \\ 2z &= 4 \end{aligned} \tag{3}$$

也就是：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P_{23}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{31}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{U} \tag{4}$$

注意到 P_{23}, E_{31} 对 $\mathbf{b}$ 也是同样起作用的，即：

$$P_{23}E_{31}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \tag{5}$$

我们也可以将 $A, \mathbf{b}$ 合起来写成如下的形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & \mathbf{c} \end{bmatrix} \tag{6}$$

我们将 $\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ 称为方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的**增广矩阵**，整个消元的过程也可以视作对该矩阵进行乘法。

现在我们继续回到解方程的过程，我们还需要通过**回代** 的方式来求解，即对于如下的方程组：

$$\begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 8y+18z &= 8 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

我们还需要通过如下的方式来进一步的消元：

$$\begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 8y+18z &= 8 \\ 2z &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 8y &= -28 \\ 2z &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x-2y &= 13 \\ 8y &= -28 \\ 2z &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 6 \\ 8y &= -28 \\ 2z &= 4 \end{aligned} \tag{7}$$

上述过程也可以用如下矩阵的形式表示:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{12}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{13}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{23}} \begin{bmatrix} U & \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{8}$$

最后我们只需要把每个变元的系数变回 1 即可:

$$\begin{aligned} x &= 6 & \quad & & x &= 6 \\ 8y &= -28 & \Longrightarrow & & y &= -3.5 \\ 2z &= 4 & & & z &= 2 \end{aligned} \tag{9}$$

这一过程我们可以用一个简单的对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(1, \frac{1}{8}, 2)$ 来进行刻画，即:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

上述整个求解方程组的过程3,7,9被称为**高斯若尔当消元法 (Gauss-Jordan Elinmation)**，其中将其变为上三角形式的过程3被称为**高斯消元法 (Gauss Elinmation)**，用矩阵的形式来表达，即如下的解方程过程4,8,10:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

可以合起来表示为:

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31} \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \mathbf{x}_0 \end{bmatrix}.$$

这里**$\mathbf{x}_0$ 就是求出的解**。

方阵 A 的逆的计算。 注意到，$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}$ 这一过程仅仅**跟 A 有关，而与 $\mathbf{b}$ 无关**，即对于任意的 $\mathbf{b}' \in \mathbb{R}^n$，都可以通过:

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31} \begin{bmatrix} A & \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \mathbf{x}_0' \end{bmatrix}.$$

来求解方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 的解 $\mathbf{x}_0'$。因此考虑三个特殊的单位向量所对应的方程组:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2, \quad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_3,$$

我们依旧可以用上述的方式来求得相应的解，即对于每个 $i \in [3]$，我们有:

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31} \begin{bmatrix} A & \mathbf{e}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \mathbf{x}_i \end{bmatrix}$$

将上述的三个等式合起来写，便有：

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E & \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3\end{bmatrix}.$$

即：

$$\begin{aligned} DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}A &= E \\ A\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} &= E \end{aligned}$$

从而由逆矩阵的性质，我们有：

$$A^{-1} = DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3\end{bmatrix}.$$

这便是**通过解方程组的形式来对矩阵 A^{-1} 的计算**。我们对其再进行一个总结：

1. 考察一个矩阵 A，其满足对于任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$，方程 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ 都有解，从而我们通过高斯-若尔当消元法可以解出：

$$DE_{ij}\cdots P\cdots E_{ij}\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E & \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3\end{bmatrix}$$

   即存在 $B = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3\end{bmatrix}$ 使得 $AB = E$，这里$DE_{ij}\cdots P\cdots E_{ij}$ **是一些消元矩阵的乘积**。
2. 另一方面，如果令 $C = DE_{ij}\cdots P\cdots E_{ij}$，我们也有 $CA = E$.
3. 最终我们可以发现 A 是可逆的，并且：

$$A^{-1} = B = C = DE_{ij}\cdots P\cdots E_{ij}$$

例 2.5

我们以上面的例子进行参考，对于矩阵 A：

$$A = \begin{bmatrix}1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

通过之前的消元法我们可知：

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}A = E$$

从而：

$$\begin{aligned} A^{-1} &= DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31} \\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{9}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix} \end{aligned}$$

这一过程也可以伴随消元的过程逐步得到，即：

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 18 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 18 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -3 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -3 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 8 & 0 & -3 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{9}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{9}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

矩阵 A^{-1} 的存在性 . 在上述的过程中，我们展现了**当存在 n 个首元**的时候，通过高斯若尔当消元法求得 n 阶方阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的方法，下面我们将进一步证明，**存在 n 个首元**也是其**逆矩阵存在**的必要条件。

定理 2.6

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，则 A^{-1} 存在当且仅当 A 有 n 个首元。

证明： 假设 A 有 n 个首元:

- 通过高斯若尔当消元法，我们可以解出所有形如 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$ 的方程，即:

$$D \cdots E_{ij} \cdots P \cdots E_{ij} \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}$$

  也就是说，令 $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}$，我们有 $AB = E$.
- 另一方面，令 $C = D \cdots E_{ij} \cdots P \cdots E_{ij}$，我们有 $CA = E$.
- 从而 A 是可逆的，并且

$$A^{-1} = B = C = D \cdots E_{ij} \cdots P \cdots E_{ij}.$$

另一方面，我们证明，如果存在一个 B 使得 $AB = I$，则 A 有 n 个首元。反设 A 没有 n 个首元，这意味着高斯消元法会得到某一行全 0 的情况，即:

$$E_{ij} \cdots P \cdots E_{ij} A = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

令 $M = E_{ij} \cdots P \cdots E_{ij}$，注意到 M 是可逆的，但是：

$$M = ME = MAB = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} B$$

这意味着 M 存在一行全是 0，与 M 是可逆的矛盾。 □

至此，我们完成了如下引理1.14一个证明：

引理

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面叙述是等价的：

1. A 是可逆的。
2. 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 都有唯一解.
3. column-rank$(A) = \dim(\mathbf{C}(A)) = n$.
4. row-rank$(A) = \dim(\mathbf{C}(A^T)) = n$.
5. 存在矩阵 B 使得 $AB = E$。
6. 存在矩阵 C 使得 $CA = E$。
7. A 有 n 个首元。

也回答了如下的两个问题：

1. 对于 n 阶方阵 A 来说, 若存在 n 阶方阵 B 满足 $AB = E$ 或者 $BA = E$, 则 A 是可逆的, $B = A^{-1}$。
2. 如何求解一个 n 阶方阵 A 的逆矩阵 A^{-1}，即通过**高斯若尔当消元法**。

以及定理1.12的一个特殊情况：

当方阵 A 是可逆的时候，row-rank(A) = column-rank$(A) = n$。

我们将在下一节中完整给出定理1.12的证明，同时探讨清楚一般情况下方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解的情况。