线性代数

行列式 (Determinants)

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2025 年 2 月 11 日

这是一个关于行列式的讲义，主要分为两部分:行列式的一个快速学习 [1] 和行列式的正式介绍 [2]，以应对同学们的不同需求。如果只是想快速知道如何计算行列式的值，可以看 [1]，但如果想对行列式进行一个系统的学习，请阅读 [2]。

1 行列式的一个快速学习

1.1 行列式和矩阵的联系和区别

1. 从形式上来说，行列式是 $n \times n$ 的形式，而矩阵的行和列是可以不相等的。特别的，我们会用 $\begin{vmatrix} * \end{vmatrix}$ 表示行列式，而用 $\begin{bmatrix} * \end{bmatrix}$ 表示矩阵：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

   上式左边是一个行列式，而右边则表示矩阵。

2. 从值上来说，行列式是一个具体的值，而矩阵是由 $m \times n$ 个元素组成的一张表。
3. 对于一个方阵 A，我们将以其形式的行列式的值记为 $\det(A)$ 或者 $|A|$，称为矩阵 A 的行列式。如：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad , A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   我们称 $\det(A) = -2$。

4. 对于方阵 A 来说，$\det(A)$ 是否等于 0 决定了矩阵 A 是否可逆。

1.2 行列式的计算

行列式的一些性质　我们将首先列举出一些行列式的性质，这些性质能帮助我们进行对行列式的计算。然后我们将给出一些行列式的具体公式。请注意，尤其是二阶和三阶的行列式，其只是恰好具有下列的形式，并不具备往高阶推广的方式。

- 将行列式的某些列的线性组合加到另一列上 (其他列不改变)，行列式的值保持不变。
- 将行列式的某些行的线性组合加到另一行上 (其他行不改变)，行列式的值保持不变。
- 交换行列式的两列，行列式的值变号。

- 交换行列式的两行，行列式的值变号。
- 行列式的某一列乘以一个系数 k，行列式的值变为原来的 k 倍。
- 行列式的某一行乘以一个系数 k，行列式的值变为原来的 k 倍。
- 三角矩阵 (上三角 or 下三角) 的行列式的值等于主对角线上（即左上向右下）元素的乘积。

二阶行列式的计算： 对于一个 2×2 的矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}=x_1y_2-x_2y_1$$

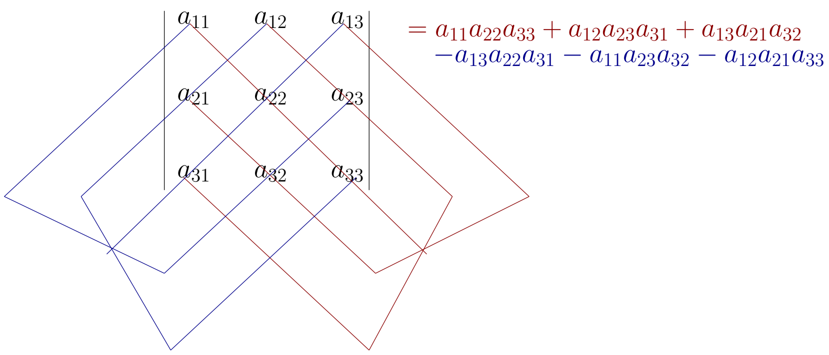
三阶行列式的计算： 对于一个 3×3 的矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

我们有：

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

这也就是书本中常见的三阶行列式计算的记忆方式：



n 阶行列式的计算： 我们一共提供三种方法来计算 n 阶行列式，请注意这三种方式对二阶和三阶也是成立的，更确切地说是基于这三种方式我们可以发现二阶行列式和三阶行列式计算的一个简单形式。

1. 对矩阵 (行列式) 进行初等列变换 (行变换)，将其转换成一个三角矩阵，然后计算三角矩阵的行列式的值，再根据上述行列式的性质反推回原来的行列式的值。我们这里用一个例子进行说明：

例 1.1

考察 4×4 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 5 & -\frac{5}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & -\frac{9}{10} \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & 0 \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而:

$$\det(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & 0 \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot (-\frac{7}{5}) \cdot 0 = 0$$

2. 行列式的展开。我们可以将 n 阶行列式展开成若干个更小的行列式的和。具体来说，令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，并且 $n \geqslant 2$。对于任意的 $i, j \in [n]$，我们定义:

$A_{-i,-j}$ 是将 A 第 i 行第 j 列的元素删去后得到的 $n-1 \times n-1$ 的矩阵。

下列数:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{-i,-j})$$

称之为代数余子式 (Cofactor)。则我们可以将 n 阶行列式展开为:

- 按第 i 行展开: $\det(A) = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$。
- 按第 j 列展开: $\det(A) = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$。

我们也用一个例子进行展示。

例 1.2

考察行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

我们根据其**第一列**展开进行计算:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}&=1\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&1&1\\0&3&0\\0&0&4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&0\\0&0&4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&0\\0&3&0\end{vmatrix}\\&=24-12-8-6=-2\end{aligned}$$

我们也可以按**第二列**进行展开进行计算:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}1\begin{vmatrix}1&0&0\\1&3&0\\1&0&4\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}2\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&0\\1&0&4\end{vmatrix}=-12+2*5=-2$$

也可以选择按**第二行**展开进行计算:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}1\begin{vmatrix}1&1&1\\0&3&0\\0&0&4\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}2\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&0\\1&0&4\end{vmatrix}=-12+2*5=-2$$

3. 行列式的计算公式，即行列式的定义。令 A 是一个 $n\times n$ 的矩阵，则

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in Perm(n)}(-1)^{\tau(\sigma)}a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

这里 $Perm(n)$ 指的是 $[n]$ 上的所有置换 (全排列)，而 $\tau(\sigma)$ 指的是置换对应排列的逆序数。我们用三阶的例子来进行展示:

例 1.3

对于 3×3 的矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

其一共有 $123,132,213,231,312,321$ 六种不同的置换，并且:

$$\tau(123)=0,\ \tau(132)=1,\ \tau(213)=1,\ \tau(231)=2,\ \tau(312)=2,\ \tau(321)=3$$

从而我们有:

$$\begin{aligned}\det(A)=&(-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}\\&+(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31}\\=&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

需要注意的是，当考虑 n 时一共有 $n!$ 种不同的置换，因此此时共有 $n!$ 项。

Cramer 法则: 最后我们简单介绍下 Cramer 法则，其可以用来求解方程组和计算矩阵的逆矩阵。考察下列的方程组:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad \text{即} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} (\text{记作 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b})$$

对于任意的 $i \in [n]$，令 A_i 是将 A 的第 i 列替换成 $\boldsymbol{b}$ 后的矩阵，则方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解可以表示为:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\det(A_n)}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

当然此时若 $\det(A) = 0$，则该方程组无解或者有无穷多解。运用 Cramer 法则，我们也可以求解矩阵的逆矩阵，即对于一个 $n \times n$ 的矩阵 A，其逆矩阵 A^{-1} 可以表示为:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

再次强调，这里的 A_{ij} 是对应的代数余子式。特别的，我们将 $\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$ 称为 A 的伴随矩阵，记作 A^*。

2 行列式的正式介绍

2.1 行列式究竟求的是什么?

为了考虑为何要引入**行列式**这个概念，让我么能从**二阶**的例子开始。我们直接给出<u>二阶行列式</u> 的严格定义:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$$

两个不共线 (线性无关) 的二维平面上的向量可以在平面上围出一个平行四边形。上述定义实际上是计算了在二维平面上由向量 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 围成的平行四边形的**有向面积**。这里的正方向指的是逆时针方向，即从 (x_1, y_1) 到 (x_2, y_2) 的方向如果是逆时针方向，则面积为正，否则为负。如图**??**所示。

同样的想法，我们可以扩展到**三维**的情况。三个不共面 (线性无关) 的三维向量可以在三维空间中围成一个**有向体积**。这里其体积的方向，我们可以通过**右手系**来确定。需要说明的是，我们也可以使用<u>左手系</u>，

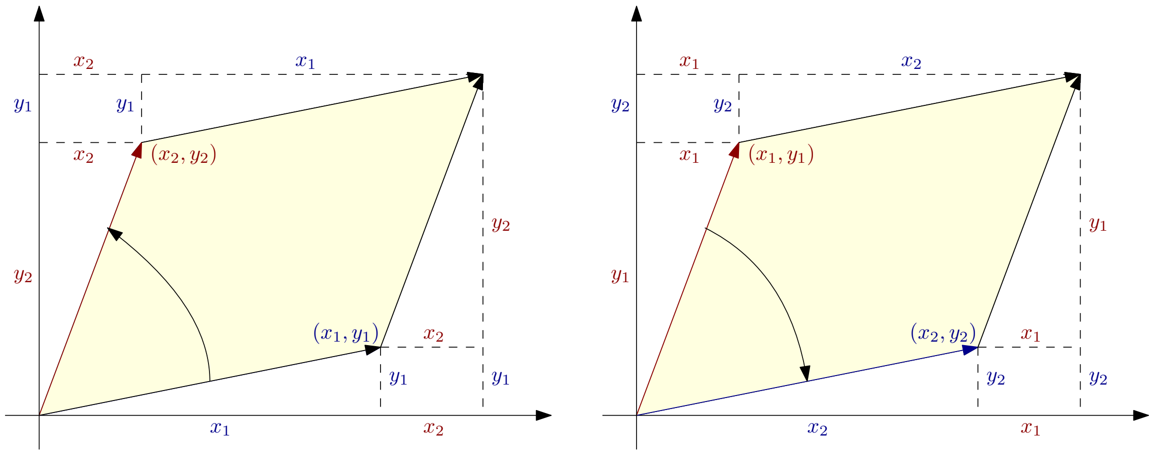


图 1　上图中，左图由向量 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 围成的平行四边形的有向面积是正的；而右图由向量 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 围成的平行四边形的有向面积则是负的。

两者正好是相反的，如图??所示。当三个向量 x, y, z 确定的时候，其围成的平行六面体的有向体积也已经确定，我们将其按用列的方式表示：

$$\begin{vmatrix} x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

这其实就是**三阶行列式**。

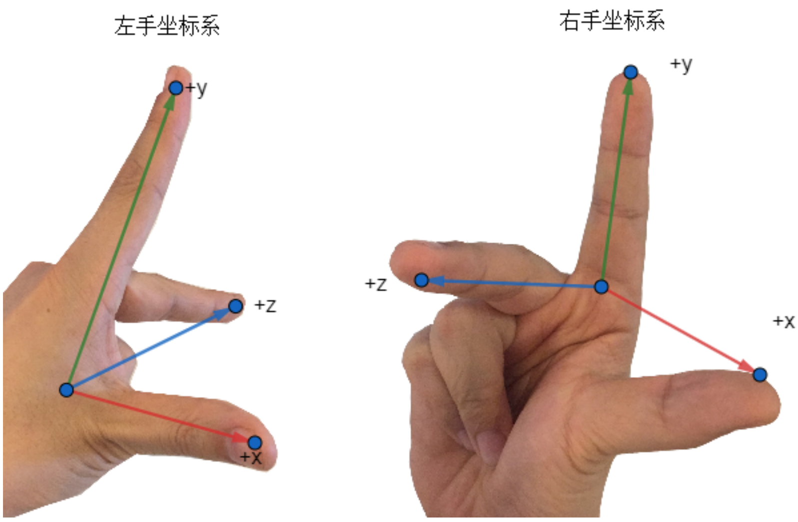


图 2　我们以右手系为例进行介绍。对于三个向量 x, y, z 来说，将大拇指指向第一个向量 x，食指指向第二个向量 y，则中指的方向表示为正方向，即如果第三个向量 z 和中指同向，则该有向体积是正的；否则则是负的。左手系的情况恰好相反。

我们进一步推广到n **维**的情况。n 个不共面 (线性无关) 的 n 维向量 $a_1, \ldots, a_n$ 可以在 n 维空间中围

成一个平行六面体，我们的目标依旧是求其**有向体积**。我们记这个函数为 $\mathcal{D}$，即 $\mathcal{D}(a_1,\dots,a_n)$ 表示 n 个向量 $a_1,\dots,a_n$ 围成的有向体积。当然，我们可以将其表示为行列式的形式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1[1] & \cdots & a_1[n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n[1] & \cdots & a_n[n] \end{vmatrix}$$

当然，这就是n **阶行列式**。我们明确一下，n **阶行列式**实际上在求n **维空间中** n **个向量围成的有向体积。**所以这也解释了为什么行列式只有类似方阵这样的形式，而不存在 $m \times n$ 的样子。

我们现在给了行列式的一个几何直观和基于几何上的定义，但是我们还有一些问题没有解决：

1. 这个定义是良定义的么？即是否可能有不同的值，抑或是不存在具体的值？
2. 这个有向体积该如何计算？大小？符号？

我们将在下节给出介绍。在这，为了后面的叙述方便，我们介绍一些后面会用到的符号，对于这 n 个 n 维向量 $a_1,\dots,a_n$，我们将其写成矩阵的形式：

$$A := \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则 $\det(A)$, $|A|$, $\mathcal{D}(a_1,\dots,a_n)$ 以及 $\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ 均表示为该对应的 n 阶行列式。特别的，我们也称 $\det(A)$ 为**方阵** A **的行列式。**

2.2 行列式的基本性质

有向体积应当会有如下基本的性质：

1. **单位体积**；我们定义一个具体的单位，即由 n 个单位向量 $e_1,\dots,e_n$ 围成的有向体积为 1：

   $$\mathcal{D}(e_1,\dots,e_n) = 1$$

   这也就是**单位矩阵** E **的行列式为** $\det(E) = 1$。

2. **反对称性**：这是关于符号的一个基本性质，假设我们交换了两个向量的位置，从 2 维和 3 维的情况来比较，这相当于体积反向，从而两者的有向体积会差一个负号，即：

   $$\mathcal{D}(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots a_n) = -\mathcal{D}(a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_i,\cdots a_n)$$

   这也就是**交换两列会改变行列式的符号。**

3. **线性性**：这是关于体积计算的一个性质。考虑向量加法的几何意义，即两个向量的和是一个平行四边形的对角线，其有向体积等于两个向量的有向体积之和，图**??**是一个二维上的解释。因此有向体积对于每个向量都应该是**线性的**，即对任意的 $i \in [n]$，我们都有：

   $$\begin{aligned} \mathcal{D}(a_1,\dots a_i + y,\dots,a_n) &= \mathcal{D}(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n) + \mathcal{D}(a_1,\dots,y,\dots,a_n) \\ \mathcal{D}(a_1,\dots,\lambda a_i,\dots,a_n) &= \lambda\mathcal{D}(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n) \end{aligned}$$

   我们也可以加这两条合起来写，即对于任意的 $i \in [n]$ 和 $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$，我们都有：‘

   $$\mathcal{D}(a_1,\dots,\lambda a_i + \mu y,\dots,a_n) = \lambda\mathcal{D}(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n) + \mu\mathcal{D}(a_1,\dots,y,\dots,a_n)$$

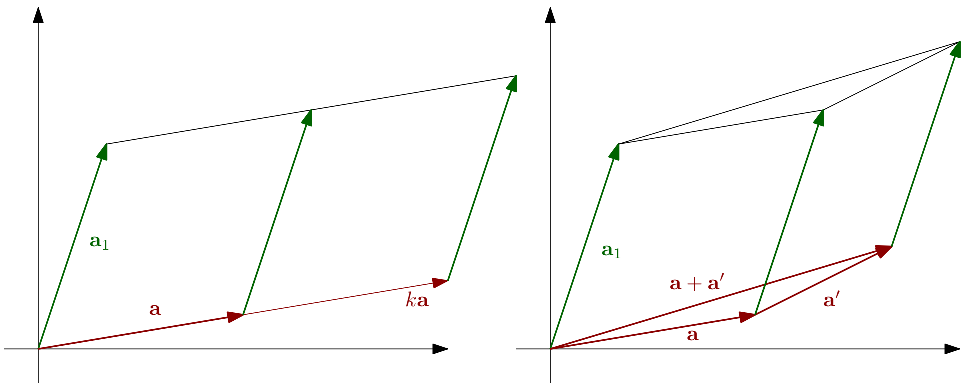


图 3　有向体积关于每个向量是线性的在二维的一个解释。记 S_1 是 a, a_1 张成的平行四边形的有向面积，S_2 是 ka, a_1 张成的平行四边形的有向面积,S_3 是 a', a_1 张成的平行四边形的有向面积,S_4 是 $a+a', a_1$ 张成的平行四边形的有向面积，则:$S_2 = kS_1$，$S_4 = S_1 + S_3$

因此,为了求得 n 个 n 维向量 $a_1, \ldots, a_n$ 围成的有向体积 $\mathcal{D}(a_1, \ldots, bmx_n)$,函数 $\mathcal{D}$ 应当满足上述三个性质,而我们将说明,**满足这三个性质的函数 $\mathcal{D}$ 是存在且唯一的**,从而其就是我们想要的行列式的良定义。

行列式的衍生性质　我们先观察一些行列式的衍生性质。在接下来的内容中，我们将分不加区分的 n 个对应的向量 $a_1, \cdots, a_n$ 和对应 $n \times n$ 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$。

定理 2.1

- 如果 A 存在一个列向量是 0，则 $\det(A) = 0$。
- 如果 A 存在两个列向量相同，则 $\det(A) = 0$。
- 如果 A 存在一列是其他列的倍数，则 $\det(A) = 0$。

证明:

1. 不妨假设 A 的第一列是 $a_1 = 0$，则我们有:

$$\mathcal{D}(a_1', \cdots, a_n) = \mathcal{D}(a_1 + a_1', \cdots, a_n) = \mathcal{D}(a_1, \cdots, a_n) + \mathcal{D}(a_1', \cdots, a_n)$$

从而:

$$\det(A) = \mathcal{D}(a_1, \cdots, a_n) = \mathcal{D}(0, \cdots, a_n) = 0$$

2. 如果 A 存在两列向量相同，不妨记为 $a_i = a_j$，则我们有:

$$\mathcal{D}(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -\mathcal{D}(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n) = -\mathcal{D}(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n)$$

从而:

$$\det(A) = \mathcal{D}(a_1, \cdots, a_n) = 0$$

3. 如果 A 存在一列是其他列的倍数，不妨记为 $a_i = ca_j$，则我们有:

$$\det(A) = \mathcal{D}(a_1, \cdots, ca_j, \cdots, a_j, \cdots a_n) = c\mathcal{D}(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = 0$$

□

定理 2.2

如果 rank$(A) < n$, 则 $\det(A) = 0$。

证明: 由 $\text{rank}(A) < n$ 可知 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是线性相关的, 即存在 $1 \leqslant i_0 < i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ 和 $c_1, \ldots, c_k$ 使得:

$$\boldsymbol{a}_{i_0} = c_1 \boldsymbol{a}_{i_1} + \cdots c_k \boldsymbol{a}_{i_k}$$

从而我们有:

$$\begin{aligned}\det(A) =& \mathcal{D}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_0}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \\ =& \mathcal{D}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, c_1 \boldsymbol{a}_{i_1} + \cdots c_k \boldsymbol{a}_{i_k}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \\ =& \sum_{j=1}^{k} c_j \mathcal{D}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_j}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_j}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \\ =& 0\end{aligned}$$

□

定理 2.3

将矩阵的某些列的线性组合加到另一列上 (其他列不改变), 行列式的值保持不变。

证明: 利用:

- $D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, c\boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots \boldsymbol{a}_n) = c\mathcal{D}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = 0$

可知:

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i + \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \mathcal{D}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

□

行列式的计算 有了上述的性质以后, 我们已经可以对行列式进行计算了。首先我们来考虑两个特殊的形式, 即式对角矩阵 和三角矩阵 的情况。

定理 2.4 (对角矩阵的行列式值)

令 A 是一个 $n \times n$ 的对角矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A) = a_1 a_2 \cdots a_n$$

证明：利用行列式的线性性和单位体积可得：

$$\det(A) = \mathcal{D}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = a_1 a_2 \cdots a_n \mathcal{D}(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = a_1 a_2 \cdots a_n \det(E) = a_1 a_2 \cdots a_n$$

□

定理 2.5（三角矩阵的行列式值）

令 A 是一个 $n \times n$ 的三角矩阵 (triangluar matrix)：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{或者} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有：

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

证明：令 $i, j \in [n]$，注意到由线性性和定理2.3，对矩阵进行初等列变换会对行列式产生如下的变化：

1. **列加法**：将第 j 列的 l 倍加到第 i 列上，我们有：

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + la_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + la_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   则我们有：

$$\det(A') = \det(A)$$

2. **列交换**：将第 j 列和第 i 列互换，我们有：

$$A' = \begin{Bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{Bmatrix}$$

   则我们有：

$$\det(A') = -\det(A)$$

3. **列乘法**：令 $l \in \mathbb{R}$，将第 i 列乘以 l 倍，我们有：

$$A' = \begin{Bmatrix} a_{11} & \cdots & la_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & la_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{Bmatrix}$$

   则我们有：

$$\det(A') = l \det(A)$$

从而通过矩阵的初等列变换，我们可以得到：

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

□

定理2.5的证明过程实际上也给求一般 n 阶行列式的方法，即：

1. 我们对 A 进行初等列变换，或者等价地说，对 A^T 进行初等行变换。最终我们可以得到一个 A^T 的行阶梯形 R。从而 R^T 是一个下三角矩阵。令其对角线的元素为 $d_1, \cdots, d_n$，则我们有：
$$\det(R^T) = d_1 \cdots d_n$$
2. 我们根据 A 变成 R^T 的过程，注意到这个过程中得每一步都是列变换，从而根据前面得结论一步步反推得到 $\det(A)$ 的值。

下面我们通过一些例子来进一步说明。

例 2.6

考察 2×2 的矩阵：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

我们有：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d - \frac{cb}{a} \end{bmatrix}$$

从而：

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d - \frac{cb}{a} \end{vmatrix} = a \cdot (d - \frac{cb}{a}) = ad - bc$$

例 2.7

考察 3×3 的矩阵：

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -4 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 8 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 8 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

从而:

$$\det(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot \frac{1}{2} = -4$$

对于更高阶的矩阵情况也是一样的:

例 2.8

1. 考察 4×4 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 5 & -\frac{5}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & -\frac{9}{10} \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & 0 \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而:

$$\det(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & 0 \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot (-\frac{7}{5}) \cdot 0 = 0$$

2. 考察 $n \times n$ 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

我们有：

$$\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a-\frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

从而：

$$\det(\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}) = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a-\frac{1}{a} \end{vmatrix} = a^{n-1}(a-\frac{1}{a}) = a^n - a^{n-2}$$

至此，我们已经可以计算出任何 n 阶行列式的值了。简单回顾一下对 $\det(A)$ 的计算：

1. 根据我们的理解，$\det(A)$ 如果存在，一定要满足三条基本性质。
2. 我们推得了关于 $\det(A)$ 的一些其他性质。
3. 通过上述的讨论，我们知道了初等列变换对 $\det(A)$ 的影响。
4. 而通过初等列变换，我们可以将 A 转变成一个下三角矩阵 L.
5. 我们知道 $\det(L)$ 是多少，从而根据 3 和 4，我们可以从 $\det(L)$ 得到 $\det(A)$ 的值。

这解决了我们前面提到的一个问题，即 $\det(A)$，或者说函数 $\mathcal{D}$ 是**存在的**!

行列式的行变换？ 在之前的讨论中，受有向体积的启发，我们一直在讨论初等列变换对行列式的影响，而这一部分我们将讨论初等行变换对行列式的影响。我们会发现，初等行变换对行列式的影响和初等列变换是完全的。具体来说，我们将证明如下的两个定理：

定理 2.9

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，我们有：

$$\det(A) = \det(A^T)$$

定理 2.10

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，B 是一个 $n \times n$ 的矩阵，我们有：

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

上述定理有一个很有意思的推论，即：

推论 2.11

给定一个正交矩阵 Q，我们有：

$$\det(Q) = \pm 1$$

这说明，**在 $\mathbb{R}^n$ 中由 n 个标准正交 (orthonormal) 基向量构成的平行六面体的体积是 1。**

证明： 注意到：

$$Q^T Q = E$$

从而我们有：

$$1 = \det(E) = \det(Q)\det(Q^T) = \det(Q)\det(Q) = (\det(Q))^2 \quad \Longrightarrow \quad \det(Q) = \pm 1$$

□

为了证明定理2.9和定理2.10，我们先来考虑其特殊情况，即矩阵 B 是**初等矩阵**的情形。

引理 2.12

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，P 是一个 $n \times n$ 的初等矩阵，则我们有：

$$\det(AP) = \det(A)\det(P)$$

证明： 注意到 P 是下列三种矩阵的一种：

$$\underset{E(ij(k))}{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}, \underset{E(i,j)}{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}, \underset{E(i(k))}{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & k & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}$$

由于 AP 是对 A 进行相应的列变换操作，所以我们**只需要检查每种初等矩阵是否满足 $\det(AP) = \det(A)\det(P)$ 即可。**令 $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$，我们下面分三种情况讨论：

1. $P = E(ij(k))$。注意到：

$$AE(ij(k)) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i + k\mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$\begin{aligned} \det(E(ij(k))) &= \det(E) = 1 \\ \det(AE(ij(k))) &= \mathcal{D}(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i + k\mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) \\ &= \mathcal{D}(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) + k\mathcal{D}(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_n) \\ &= \det(A) = \det(A)\det(E(ij(k))) \end{aligned}$$

2. $P=E(i,j)$。注意到:

$$AE(i,j)=\begin{bmatrix}a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_i,\cdots,a_n\end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$\begin{aligned}\det(E(i,j))&=-\det(E)=-1\\ \det(AE(i,j))&=\mathcal{D}(a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_i,\cdots,a_n)\\ &=-\mathcal{D}(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots,a_n)\\ &=-\det(A)=\det(A)\det(E(i,j))\end{aligned}$$

3. $P=E(i(k))$。注意到:

$$AE(i(k))=\begin{bmatrix}a_1,\cdots,ka_i,\cdots,a_j,\cdots,a_n\end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$\begin{aligned}\det(E(i(k)))&=k\det(E)=k\\ \det(AE(i(k)))&=\mathcal{D}(a_1,\cdots,ka_i,\cdots,a_j,\cdots,a_n)\\ &=k\mathcal{D}(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots,a_n)\\ &=k\det(A)=\det(A)\det(E(i(k)))\end{aligned}$$

□

其有一个自然的推论:

推论 2.13

令 A 是一个 $n\times n$ 的矩阵，$P_1,\ldots,P_k$ 是 $n\times n$ 的初等矩阵，则我们有:

$$\det(AP_1\cdots P_k)=\det(A)\det(P_1)\cdots\det(P_k)$$

特别的:

$$\det(P_1P_2\cdots P_k)=\det(P_1)\det(P_2)\cdots\det(P_k)$$

回顾 Gauss—Jordan 消元法:

$$E(i(k))\cdots E(ij(k))\cdots E(ij)\cdots E(ij(k))\begin{bmatrix}A & E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E & A^{-1}\end{bmatrix}$$

我们有:

定理 2.14

每个可逆矩阵都可以由一系列的初等矩阵的乘积得到。

结合推论2.13，我们可以完成定理2.9和定理2.10的证明。

证明：[定理2.9的证明]

1. 对于初等矩阵 P，我们有 $\det(P)=\det(P^T)$。

2. 如果 A 不是可逆的，则 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) < n$，从而

$$\det(A) = \det(A^T) = 0$$

3. 如果 A 是可逆的，则存在一系列的初等矩阵 $P_1, \cdots P_k$ 使得：

$$A = P_1 \cdots P_k$$

从而 $A^T = P_l^T \cdots P_k^T$，因此：

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(P_1) \cdots \det(P_k) \\ &= \det(P_1^T) \cdots \det(P_k^T) = \det(P_k^T) \cdots \det(P_1^T) = \det(P_k^T \cdots P_1^T) = \det(A^T)\end{aligned}$$

□

证明：[定理2.10的证明] 如果 B 是可逆的，则存在一系列的初等矩阵 $P_1, \cdots P_k$ 使得：

$$B = P_1 \cdots P_k$$

从而：

$$\begin{aligned}\det(AB) = \det(AP_1 \cdots P_k) &= \det(A)\det(P_1) \cdots \det(P_k) \\ &= \det(A)\det(P_1 \cdots P_k) = \det(A)\det(B)\end{aligned}$$

如果 B 不是可逆的，则 AB 也不可逆，否则：

$$E = (AB)^{-1}AB = ((AB)^{-1}A)B$$

所以此时我们有：

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$$

□

例 2.15（$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 一个运用-Cramer 法则 (I)）

我们来展示 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 的一个运用。考察下列的方程组：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad 即 \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} (\text{记作 } A\mathbf{x} = \mathbf{b})$$

注意到：

$$A \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{x} & A\mathbf{e}_2 & A\mathbf{e}_3 & \cdots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

记下列矩阵为 A_1:

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

注意到:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = x_1$$

则我们有:

$$\det(A)x_1 = \det(A_1), \quad \text{即: } x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

一般的，对于任意的 $i \in [n]$，令 A_i 是将 A 的第 i 列替换成 $\mathbf{b}$ 后的矩阵，则我们有:

$$A \begin{bmatrix} 1 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & x_n & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 \cdots A\mathbf{x} \cdots A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} = A_i \quad \Longrightarrow \det(A)x_i = \det(A_i)$$

从而方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解可以表示为:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\det(A_n)}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

这就是**克拉默法则 (Cramer's Rule)**。

行列式的值跟首元的关系。 我们再来看下其跟矩阵 A 的首元的关系。令可逆矩阵 A 的首元为 $p_1, \cdots, p_n$，通过 Gauss 消元法我们可以将矩阵 A 变为如下的行阶梯形矩阵:

$$U = \begin{bmatrix} p_1 & * & \cdots & * \\ 0 & p_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}$$

由于上述过程只使用了行加法和行交换操作 (列加法或者列交换)，从而我们有:

$$\det(A) = \det(U) = p_1 p_2 \cdots p_n \text{ 或者 } \det(A) = -\det(U) = -p_1 p_2 \cdots p_n$$

即:

$$|\det(A)| = |p_1 p_2 \cdots p_n|.$$

这也被称作是行列式的**主元式 (Pivot Formula)**。

2.3 行列式的正式定义

在这一部分中，我们将给出行列式的正式定义，最终我们将回答还剩下的遗留的问题：$\det(A)$，或者说函数 $\mathcal{D}$ 是**唯一的**。

考虑一个 $n \times n$ 的矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

注意到其每个列向量：

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = a_{1j} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{nj} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{e}_i$$

从而由行列式的线性性，我们有：

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \mathcal{D}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{e}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \mathcal{D}(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

将其每一列都表示成 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 的线性组合，并展开则有：

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n} \mathcal{D}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_n})$$

上述等式一共有n^n项。由行列式的性质，如果存在 $i_k = i_j$，则我们有：

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_k}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_j}, \cdots \boldsymbol{e}_{i_n}) = 0$$

从而上述等式可以转化为：

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \sum_{i_1 \in [n]} \sum_{\substack{i_2 \in [n] \\ i_2 \neq i_1}} \cdots \sum_{\substack{i_n \in [n] \\ i_n \neq i_1, \cdots, i_n \neq i_{n-1}}} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n} \mathcal{D}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_n}) \tag{1}$$

我们来观察一下等式1右边的每一项：

1. $\mathcal{D}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_n})$ 实际上对应的矩阵是个**置换矩阵**，从而其行列式值为 1 或者 -1。
2. $a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n}$ 中 $i_1, \ldots, i_n$ 实际上是对 $1, \ldots, n$ 的一个**重排列**。

为了进一步讨论清楚每一项的值，我们引入一个新的概念：**置换 (Permutation)**。

置换 (Permutation)　一个置换实际上就是一个从 $1, \ldots, n$ 到 $1, \ldots, n$ 的一个重排列。下面我们给出其正式的定义：

定义 2.16（置换）

固定一个 $n \in \mathbb{N}$, 一个 $[n]$ 的置换 (Permutation) 是一个 $[n] \to [n]$ 的双射函数 (bijective function)σ, 并且我们定义：

$$\operatorname{Perm}(n) = \{\sigma \mid \sigma\text{是 } [n] \text{ 的一个置换。}\}$$

例 2.17

1. $1, 3, 2, 4$ 是 $1, 2, 3, 4$ 的一个置换 σ，即 $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 4$。
2. $\sigma(i) = n + 1 - i$ 是 $[n]$ 上的一个置换，其将 $1, 2, \ldots, n$ 重排列成 $n, n-1, \ldots, 1$。

一个 $[n]$ 上的置换实际上对应了一个 $[n]$ 上的排列。为了方便，**很多时候我们将一个置换 $\sigma \in \operatorname{Perm}(n)$ 表示成一个序列的形式，即** $\sigma := \sigma(1)\ldots\sigma(n)$。不难发现，$\operatorname{Perm}(n)$ 的所有元素组成了 $[n]$ 上的一个全排列，因此其个数是 $n!$，即：

定理 2.18

$\operatorname{Perm}(n)$ 的元素个数是 $n!$。

从而我们可以将等式1重写成：

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \sum_{\sigma \in \operatorname{Perm}(n)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \mathcal{D}(\boldsymbol{e}_{\sigma}(1), \cdots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}) \tag{2}$$

我们需要进一步确认 $\mathcal{D}(\boldsymbol{e}_{\sigma}(1), \cdots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)})$ 的大小，其对应的矩阵 $P = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{\sigma}(1), \cdots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}\end{bmatrix}$ 是一个**置换矩阵**：

1. P 通过若干次列交换操作变成单位矩阵 E。
2. 每次列交换操作改变其行列式的符号。
3. $\det(P) = (-1)^{k_\sigma}$，这里 k_σ 是列交换的次数。

因此，等式2可以进一步写成：

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \sum_{\sigma \in \operatorname{Perm}(n)} (-1)^{k_\sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}. \tag{3}$$

等式3似乎可以作为行列式的**正式定义**，但其还面临一个问题：k_σ 不一定唯一。考虑如下定义在 $[3]$ 上的置换 σ：$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$，其对应的置换矩阵为：

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

我们可以通过交换 $1 \leftrightarrow 2$ 和 $1 \leftrightarrow 3$ 两次列交换操作将其变成单位矩阵 E，也可以通过交换 $1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 3$, $3 \leftrightarrow 1, 1 \to 2$ 四次列交换操作将其变成单位矩阵 E。因此，**用列交换操作次数变成单位矩阵 E 的方式**定义 k_σ 并不好，我们要进一步探索 k_σ 的性质。

逆序数 (Inverse Number)　考虑 $[4]$ 上的一个置换 σ_0:

$$\sigma_0(1)=4,\sigma_0(2)=2,\sigma_0(3)=1,\sigma_0(4)=3$$

注意到在对应的排列中，第一个位置是 4，第二个位置是 2；**第一个位置更靠前，但数字更大**，更严谨的说，这与正常大小顺序不同；我们称满足这样的一个性质的对 (i,j) 为一个**逆序对**。一个置换 σ 的逆序数则是其逆序对的个数，下面是其正式的定义。

定义 2.19（逆序数 (Inversion number)）

给定一个置换 $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$，其对应排列的**逆序数** $\tau(\sigma)$定义为：

$$\tau(\sigma)=|\{(p,q)\mid 1\leqslant p<q\leqslant n \text{ 并且 } \sigma(p)>\sigma(q)\}|$$

特别的，逆序数为**奇数**的排列称为**奇排列**，逆序数为**偶数**的排列称为**偶排列**。

例 2.20

1. 在上述的置换 σ_0 中，注意到 $(1,2),(1,3),(1,4),(2,1)$ 都是逆序对，因此 $\tau(\sigma_0)=4$。
2. 在置换 $\sigma_1=1324$ 里，只有 $(2,3)$ 是逆序对，因此 $\tau(\sigma_1)=1$。

对于一个排列，我们将其两个位置上的数进行交换称为一次对换。 比如：

$$1324\to 1234$$

就是一次对换。

逆序数的重要性质　观察如下的排列：

$$\begin{aligned}
\tau(4213)=4 &\implies 4213\to 2413\to 2143\to 2134\to 1234\\
\tau(1324)=1 &\implies 1324\to 1234\\
\tau(3241)=3 &\implies 3214\to 2314\to 2134\to 1234
\end{aligned}$$

逆序数恰好可以作为一个将置换 $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ 变回 $123\cdots n$ 的个数！

定理 2.21

给定置换矩阵

$$P=\left[\boldsymbol{e}_\sigma(1),\cdots,\boldsymbol{e}_{\sigma(n)}\right]$$

我们可以通过 $\tau(\sigma)$ 次列交换将其变回单位矩阵 I。

证明： 注意到对于一个置换 σ，我们有：

$$\tau(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}|\{t\mid t>i \text{ 并且 } \sigma(i)>\sigma(t)\}|$$

从而对于置换矩阵我们可以定义如下的列交换操作, 初始令 $k=n$:

1. 不妨令 $k=\sigma(t)$，令 $t_1<t_2<\cdots<t_j$ 是满足 $k>\sigma(t_i)$ 的位置。依次将第 k 列与第 t_i 列进行交换，共交换 j 次。
2. 令 $k=k-1$，重复上述过程。

注意到上述列交换的总数恰好是置换 σ 的逆序数 (为什么？)，从而定理得证。 $\square$

行列式的正式定义。 定理2.21说明，可以用 $\tau(\sigma)$ 来定义 k_σ！

定义 2.22

令 A 是一个 $n\times n$ 的矩阵，我们定义：

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in Perm(n)}(-1)^{\tau(\sigma)}a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

上述式子也被称为**行列式的基础公式 (Big Formula)**。不难验证，上述定义满足如下的性质：

定理 2.23

$\det(A)$ 满足下列性质：

1. $\det(\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n\end{bmatrix})=1$
2. $\det(\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\ \mathbf{a}_j,\cdots,\mathbf{a}_n\end{bmatrix})=-\det(\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_j,\cdots,\ \mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_n\end{bmatrix})$
3. $\det(\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1,\cdots,c\mathbf{a}_i+d\mathbf{a}_i',\cdots,\mathbf{a}_n\end{bmatrix})=c\det(\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_n\end{bmatrix})+d\det(\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i',\cdots,\mathbf{a}_n\end{bmatrix})$

例 2.24（定义2.22下的二维的例子）

对于一个 2×2 的矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{bmatrix}$$

一共有 $12,21$ 两种不同的置换，从而我们有：

$$\det(A)=(-1)^{\tau(12)}x_1y_2+(-1)^{\tau(21)}x_2y_1=x_1y_2-x_2y_1$$

例 2.25（定义2.22下的三维的例子）

对于一个 3×3 的矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

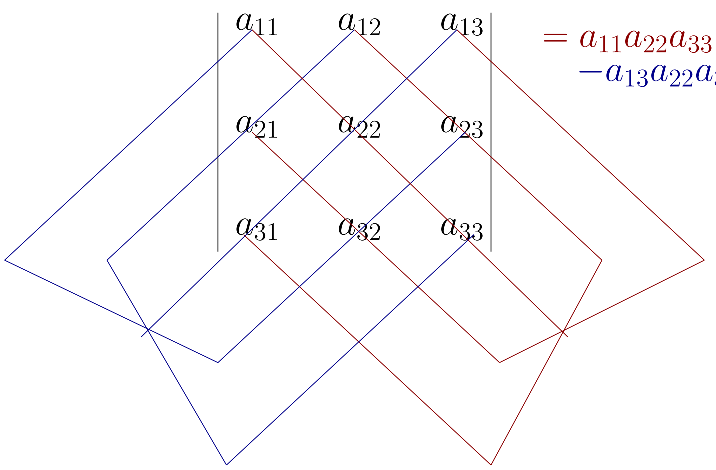
其一共有 $123,132,213,231,312,321$ 六种不同的置换，并且：

$$\tau(123)=0,\ \tau(132)=1,\ \tau(213)=1,\ \tau(231)=2,\ \tau(312)=2,\ \tau(321)=3$$

从而我们有:

$$\begin{aligned}\det(A) =&(-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}\\&+(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31}\\=&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

这也就是书本中常见的三阶行列式计算的记忆方式:



$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

现在我们可以完成**唯一性 (Uniqueness)**的证明.

定理 2.26 (Uniqueness)

$\det(A)$ 是唯一一个 $\underbrace{\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n}_{n\text{个}}\to\mathbb{R}^n$ 的函数 $\mathcal{D}$ 满足下述三个性质:

- $\mathcal{D}(\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n)=1$
- $\mathcal{D}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_j,\cdots\mathbf{a}_n)=-\mathcal{D}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_j,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots\mathbf{a}_n)$
- $\mathcal{D}(\mathbf{a}_1,\cdots,c\mathbf{a}_i+d\mathbf{a}_i',\cdots,\mathbf{a}_n)=c\mathcal{D}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_n)+d\mathcal{D}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i',\cdots,\mathbf{a}_n)$

证明: 我们前面已经证明, 满足这三个性质的函数具备如下的性质:

$$\mathcal{D}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)=\sum_{\sigma\in Perm(n)}(-1)^{k_\sigma}a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

根据前面的讨论, k_σ 可以用 $\tau(\sigma)$ 来替代, 从而:

$$\mathcal{D}(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)=\sum_{\sigma\in Perm(n)}(-1)^{\tau(\sigma)}a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}=\det(A)$$

这就完成了唯一性的证明。 $\square$

2.4 行列式的展开

回顾 2×2 的矩阵 $A=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$，我们有：

$$\det(A)=(-1)^{\tau(12)}x_1y_2+(-1)^{\tau(21)}x_2y_1=x_1\det(\begin{bmatrix} y_2 \end{bmatrix})-x_2\det(\begin{bmatrix} y_1 \end{bmatrix})$$

类似的，对于 3×3 的矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

我们也可以写成如下的形式：

$$\begin{aligned}\det(A)=&(-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}\\ &+(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31}\\ =&(-1)^{\tau(123)}a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+(-1)^{\tau(132)}a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+(-1)^{\tau(213)}a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\ =&a_{11}\det(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix})-a_{12}\det(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix})+a_{13}\det(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix})\end{aligned}$$

这两个例子表明，我们可以将行列式展开成某些更小的行列式的线性组合，更具体地说，可以按照某一行或者某一列进行展开。为了描述清楚这个过程，我们首先介绍**代数余子式 (Cofactor)**的概念。

定义 2.27（余子式与代数余子式）

令 A 是一个 $n\times n$ 的矩阵，并且 $n\geqslant 2$。对于任意的 $i,j\in[n]$，我们定义：

$A_{-i,-j}$ 是将 A 第 i 行第 j 列的元素删去后得到的 $n-1\times n-1$ 的矩阵。

下列数：

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A_{-i,-j})$$

称之为代数余子式 (Cofactor)，特别的 $M_{ij}:=\det(A_{-i,-j})$ 称之为余子式。

我们将首先证明，行列式可以按照**第一列**进行展开。我们先证明如下的引理：

定理 2.28

1. $\det(\begin{bmatrix} a \end{bmatrix})=a$.
2. 对于任意的 $n\geqslant 2$，并且 A 是一个 $n\times n$ 的矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有：

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

证明： 我们对其第一列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所以我们只需要证明，对任意的 $i \in [n]$ 有：

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} = (-1)^{i+1}a_{i1}\det(A_{-i,-1}) = (-1)^{i-1}a_{i1}\det(A_{-i,-1})$$

对其第 i 行向上交换 $i-1$ 次可得：

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots = (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所以我们只要证明：

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}\det(A_{-i,1})$$

通过行列式的性质，我们注意到：

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1} & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & A_{-i,-1} \end{vmatrix}$$

也就是要证明：

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & A_{-i,-1} \end{vmatrix} = a\det(A_{-i,-1})$$

事实上，我们有如下的引理：

引理 2.29

令 A 是 n 阶方阵，B 是 $n-1$ 阶方阵，则我们有：

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & O \\ O & B \end{vmatrix} = a\det(B).$$

证明：

$$\begin{aligned}
\det(A) = \begin{vmatrix} a & O \\ O & B \end{vmatrix} &= \sum_{\sigma\in\mathrm{Perm}(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\substack{\sigma\in\mathrm{Perm}(n)\\ \sigma(1)=1}} (-1)^{\tau(\sigma)} a a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= a \sum_{\substack{\sigma\in\mathrm{Perm}(n)\\ \sigma(1)=1}} (-1)^{\tau(\sigma)} b_{\sigma(2)-1,1}\cdots b_{\sigma(n)-1,n} \\
&= a \sum_{\delta\in\mathrm{Perm}(n-1)} (-1)^{\tau(\delta)} b_{\delta(1),1}\cdots b_{\delta(n-1),n-1} = a\det(B).
\end{aligned}$$

□

从而定理2.28得证。 □

注意到对于其他列的情况，我们可以通过 $j-1$ 次列交换将第 j 列交换到第 1 列，从而可以得到：

定理 2.30

对于任意的 $n \geqslant 2$，并且 A 是一个 $n\times n$ 的矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有：

$$\det(A) = a_{1i}A_{1i} + \cdots + a_{1i}A_{1i}$$

证明： 通过 $j-1$ 次列交换，我们可以将第 j 列逐步换到第 1 列，即：

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & a_{1,j-1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & a_{2,j-1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & a_{n,j-1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\cdots \to \begin{bmatrix} a_{1,j} & a_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,j} & a_{2,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,j} & a_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

从而:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{1,j} & a_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,j} & a_{2,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,j} & a_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{j-1}(a_{1,j}A'_{11} + a_{2,j}A'_{12} + \cdots + a_{n,j}A'_{1n}) \\ &= (-1)^{j-1}(a_{1,j}(-1)^{1+1}\det(A_{-1,-j}) + a_{2,i}(-1)^{2+1}\det(A_{-2,-j}) + \cdots + a_{n,i}(-1)^{n+1}\det(A_{-n,-j})) \\ &= (-1)^{1+j}a_{1,j}\det(A_{-1,-j}) + (-1)^{2+j}a_{2,j}\det(A_{-2,-j}) + \cdots + (-1)^{n+j}a_{n,j}\det(A_{-n,-j}) \\ &= a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \end{aligned}$$

□

由定理2.9可知，A 的行列式等于 A^T 的行列式，从而我们可以得到关于行列式按行展开的方式:

定理 2.31

对于任意的 $n \geqslant 2$，并且 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

上述这些展开式被称为**行列式的代数余子式展开 (Cofactor Exapansion)。**

一些例子。 我们再通过一些例子观察行列式的展开。

例 2.32

考察行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

我们根据其**第一列**展开进行计算:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 24 - 12 - 8 - 6 = -2$$

我们也可以按**第二列**进行展开进行计算:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 2 * 5 = -2$$

也可以选择按**第二行**展开进行计算:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 2 * 5 = -2$$

例 2.33

记下列的矩阵为 D_n:

$$D_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

我们来计算其行列式 $\det(D_n)$，将其按第一行展开可得:

$$\begin{aligned}\det(D_n) &= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2\det(D_{n-1}) - \det(D_{n-2})\end{aligned}$$

我们有:

$$\det(D_n) = 2\det(D_{n-1}) - \det(D_{n-2})$$

注意到:

$$\det(D_1) = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \det(D_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

我们可以根据上述递推式得到:

$$\det(D_n) = n + 1$$

范德蒙德矩阵 (Vandermonde Matrix)。 我们下面介绍一个非常著名的矩阵的行列式计算问题，即**范德蒙德矩阵**。考察如下的 $n \times n$ 的矩阵 V_n:

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

我们将说明，其行列式的值为:

$$\det(V_n) = \Pi_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}(x_j - x_i).$$

解: 事实上，我们可以通过归纳法进行计算:

1. $n = 2$ 时，我们有:

$$\det(V_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

2. 考虑 n 的时候，我们的策略是先用行变换将第一列除了第一个元素全部变为 0，再将行列式按第

一列展开，即：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n-x_1) \end{bmatrix}$$

$$\to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n-x_1) \end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$\det(V_n) = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix} = (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

由归纳假设我们有：

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \Pi_{2\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_j-x_i)$$

从而我们有：

$$\det(V_n) = (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\Pi_{2\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_j-x_i) = \Pi_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_j-x_i)$$

□

再次讨论 Cramer 法则。 我们在定理2.10中的应用中已经展示了 Cramer 法则，即：方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ 的解可以表示为：

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\det(A_n)}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

现在我们进一步展示其在求逆矩阵上的作用。考察可逆矩阵 A，则其逆矩阵 A^{-1} 存在，不妨令其列向量为 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$，即:$A^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}$。注意到由矩阵的运算，这等价于如下的 n 个方程组：

$$A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_2, \cdots, A\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{e}_n$$

我们先考虑 $\boldsymbol{x}_1$ 的情形，即：

$$A\boldsymbol{x}_1 = A\begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

由 Cramer 法则，我们有对任意的 $i \in [n]$：

$$x_{i1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & 1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & 0 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \frac{A_{1i}}{\det(A)}$$

更一般的来说，对于 $j \in [n]$

$$A\boldsymbol{x}_j = A\begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

同样通过 Cramer 法则我们有对任意的 $i \in [n]$：

$$x_{ij} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,i-1} & 1 & a_{j,i+1} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \frac{A_{ji}}{\det(A)}$$

从而我们可以计算出 A^{-1}：

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

我们也称上述不带分数的矩阵为**A 的伴随矩阵 (Adjugate matrix)**：

定义 2.34（伴随矩阵）

称下列矩阵：

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵 (Adjugate Matrix)。

由上述的讨论：

定理 2.35

$AA^* = \det(A)E$

这也是同济教材上，包括很多国内教材引入计算**逆矩阵** 的方式。