线性代数

符号说明

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 2 月 13 日

本文主要列举了一些课程中常用的符号，以及一些常用的与本课程不同的记号。**但在具体语境中，以具体语境中的叙述为准**。

1. 集合 (Set)

这里列举一些常用的集合记号：

- **有限自然数集：** $[n]$ 表示所有不超过 n 的正整数数集合，如 $[5]=\{1,2,3,4,5\}$。
- **自然数集：** $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$。
- **整数集：** $\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$。
- **有理数集：** $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\middle|m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0\right\}$。
- **实数集：** $\mathbb{R}$。
- **复数集：** $\mathbb{C}$。
- **空集：** $\emptyset$。

2. 标量 (Scalars)

一般使用**小写字母**或者**小写希腊字母**表示，如 a，b，c，α，β，γ 等，本课程在绝大部分时刻考虑的是实数域 $\mathbb{R}$，但是在一些特殊情况下，也会考虑复数域 $\mathbb{C}$。

3. 向量 (Vectors)

一般使用**小写加粗字母**或者**小写加粗希腊字母**表示，如 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{\eta}$ 等。特别需要注意的是，在不加额外说明的情况下，我们指的是**列向量**。即我们使用：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{或者} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

来表示一个 n 维向量。但由于篇幅原因，我们做一个特殊的约定，在没有特别注明的情况下：

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

也表示成一个 n 维列向量，这个方法是为了节省空间。

一些特殊的向量：

- **零向量：** $\boldsymbol{0}$ 表示全零向量。
- **全一向量：** $\boldsymbol{1}$ 表示全一向量。

- **单位向量**：在维数确定的时候，e_i 表示第 i 个单位向量，即第 i 个分量为 1，其余分量为 0。

向量的内积：请注意，尽管我们既会考虑列向量也会考虑行向量，但内积是针对同类型的向量而言的，即对于一个行向量和一个列向量，是没有内积的。而课程中两个向量 x 和 y 的内积我们表示为 $x \cdot y$，很多书上也会用 $\langle x, y\rangle$ 来表示，后者的好处是在考虑复数的时候其一些共轭性质 (在实数时不需要考虑，因为实数的共轭就是其本身) 更为直观。

与矩阵乘法的区别：两个向量 x 和 y 的内积 $x \cdot y$ 也可以表示为 $x^T y$，但请注意两者之间的区别：

(1) 前者定义的是**两个向量之间的内积**，后者则是**一个矩阵上的乘法**，只是两者恰好算出来是一致的。

(2) 如果 x, y 是行向量的话，结果就应该是 xy^T.

4. **矩阵 (Matrices)**

一般使用**大写字母**或者**大写希腊字母**表示，如 A，B，C，Λ 等，有时也会在下标标明矩阵的大小，如 $A_{m\times n}$ 表示一个 $m \times n$ 的矩阵。一个 $n \times n$ 的矩阵也被称作**方阵**或者**n 阶矩阵**。对于一个矩阵 A，常用 $A(i, j)$，$A_{ij}, A[i][j]$ 来表示其**第 i 行第 j 列的元素**。第 i 行第 j 列的元素为 a_{ij} 的 $m \times n$ 矩阵也会被记作 $(a_{ij})_{m\times n}$。

在课本和教材中，我们会用如下的方式表示矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad 和 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

这个括号根据个人的喜好，但请注意下面的符号表达的是行列式，而绝非也给矩阵：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

对于一个 $m \times n$ 的矩阵 A 来说，我们可以将其任意分块表示：

(1) 我们可以将其每一行看成一个**行向量**$\mathbf{a}_i$，从而矩阵可以表示为：

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}.$$

(2) 我们可以将其每一列看成一个**列向量**$\mathbf{a}_i$，从而矩阵可以表示为：

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

(3) 我们可以将其分成**若干的小矩阵**，如：

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,q} \end{bmatrix}.$$

这里每个 $A_{i,j}$ 都是一个$m_i \times n_j$ **的矩阵**，满足：

(i) $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = m$。

(ii) $n_1 + n_2 + \cdots + n_q = n$。

常用的矩阵记号：

- **全零矩阵** O：所有元素都为 0 的矩阵。
- **单位矩阵** E：对角线上的元素都为 1，其余元素都为 0 的矩阵；**在很多书上也会用 I 表示**。
- **对角矩阵** $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$：对角线上的元素为 $a_1, \ldots, a_n$，其余元素为 0 的矩阵。
- **置换矩阵**: 将单位矩阵的行进行任意置换得到的矩阵。
- **初等矩阵**：消元过程中使用的三种基本矩阵：

(1) 将第 i 行乘以一个非零常数 c 得到的矩阵 $E(i(k))$：

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 将第 i 行加上第 j 行的 k 倍得到的矩阵 $E(ij(k))$，也会用 $E_{ij}(k)$ 表示，特别的我们会省略 k 来表示这一类矩阵：

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \rightarrow \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 交换第 i 行和第 j 行得到的矩阵 $E(i,j)$，注意到这是一种特殊的**置换矩阵**，我们也常用

P_{ij} 表示:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \rightarrow \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

常用的矩阵术语:

- **矩阵的转置:** A^T 表示矩阵 A 的转置。
- **矩阵的逆:** A^{-1} 表示矩阵 A 的逆，**如果存在的话**。
- **矩阵的行列式:** $\det(A)$ 表示**方阵**A 的行列式。
- **矩阵的秩:** $\mathbf{R}(A)$ 来示矩阵的秩,我们也经常使用 rank(A) 表示,相关的概念还有column-rank(列秩)和row-rank(行秩)。