

线性代数 (III)

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2026 年 9 月 15 日

本节讲义前瞻

这节我们将进一步从代数的角度来介绍矩阵。首先将介绍矩阵的运算，我们首先将反映出一个和之前运算都不一样的性质，即矩阵的乘法运算**不具备交换律**！但是矩阵相对是自由的形式，所以我们可以看到很多形式，具体反映到就是上节已经铺垫的分块运算，其核心就是只要对应的每个分块计算都是良定义的，那么整个分块矩阵的运算就是良定义的。

接下来我们将介绍一些相关的矩阵，包括转置矩阵和逆矩阵等。矩阵的逆矩阵则是本节的一个大内容。想法是很简单的，我们希望有类似 A^{-1} 的结果方便计算，因此在方阵中考虑逆矩阵是自然的行为。但是由于矩阵的乘法不具备交换律，简单的 $AB = I$ 似乎不能直接推出 $BA = I$ 。尽管事实上这件事是对的，我们也将更后面的讲义中完成这个的叙述。但为了更好的塑造整个逻辑的严谨性，我们现在将其视作一个还未成立待解决的问题。最后我们也将从一些特殊矩阵的逆矩阵来帮助大家理解有关逆矩阵的概念。

最后将介绍转置矩阵。转置矩阵是将矩阵的行和列进行交换的矩阵，这是一个很自然的想法，其内在的涵义可能要等到对偶空间的介绍才会有更深刻的理解。但在现在至少可以看到，通过转置矩阵我们可以将点积（内积）的计算转换成矩阵乘法的运算，这为我们代数上处理提供了很大的遍历。然后作为一个在逆矩阵和转置矩阵上的展示，我们将介绍一类特殊的矩阵-置换矩阵。该矩阵在求解线性方程组中也起着举足轻重的作用，这是上一节讲义我们所故意忽略的。

本节讲义关注的问题

1. 矩阵的乘法为什么不满足交换律？分块运算是怎么样的？
2. 关于逆矩阵，为什么定义中要求 $AB = BA = I$ ，而不是只满足 $AB = I$ 或者 $BA = I$ ？
3. 如何用矩阵的乘法来定义向量的点积（内积）？置换矩阵对于求解线性方程组的作用是什么？

1 矩阵和矩阵上的运算

1.1 矩阵运算的一些法则

引理 1.1 (矩阵加法法则)

我们假设下面的表达式中的运算都是良定义的（如 $A + B$ 中 A 和 B 有相同的行数和列数）。

(交换律) $A + B = B + A$ 。

(标量乘法分配律) $c(A + B) = cA + cB$ 。

(结合律) $A + (B + C) = (A + B) + C$ 。

引理 1.2 (矩阵乘法法则)

我们假设下面的表达式中的运算都是良定义的。

(左侧矩阵乘法分配律) $A(B + C) = AB + AC$ 。

(右侧乘法分配律) $(A + B)C = AC + BC$ 。

(结合律) $A(BC) = (AB)C$ ，因此我们在写多个矩阵的连续乘法不需要括号。

矩阵乘法的交换律不成立！ 我们始终要强调的是，矩阵乘法是不满足**交换律**的，即即使假设下面的运算都是良定义的，依旧有：

$$AB \neq BA \quad \text{不总是成立.}$$

考察如下的两个矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则我们有：

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

矩阵的乘法次数

矩阵的乘法在不同的运算顺序下执行的次数差别会非常大。考察如下三个形式的矩阵：

$$A : 1 \times M, \quad B : M \times 1, \quad C : 1 \times M$$

这里 $M \in \mathbb{N}^*$ ，则我们有：

1. $A(BC)$ 所需的乘法次数为 $1 \times M \times M + M \times 1 \times M = 2M^2$ 。
2. $(AB)C$ 所需的乘法次数为 $1 \times M \times 1 + 1 \times 1 \times M = 2M$ 。

足足相差 M 倍！因此我们可以挑选合适的乘法顺序减小计算量。

1.2 分块矩阵和分块上的乘法

上述矩阵乘法的不同视角提示了我们，在计算矩阵的乘法时，我们可以通过将矩阵进行一些分块再来分别计算，如：

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \mathbf{a}_n \mathbf{b}_n.$$

分块矩阵. 一个矩阵 A 可以划分成若干个子矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}$$

其中每个 A_{ij} 是一个 $m_i \times n_j$ 的矩阵。例如，下列矩阵可以表示为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 & I_2 \end{bmatrix}$$

其中 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，也被称为是 2×2 的单位矩阵。

分块矩阵的乘法. 仿照矩阵乘法的形式，我们其实也可以写出在分块矩阵意义下的乘法，如：

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

幸运的是，只要每个具体的运算都是良定义的，即每个矩阵的乘法 $A_{ik}B_{kj}$ 都是良定义的，上述运算就是成立的。因此实际上其与矩阵乘法并无二致。

例 1.3

考察如下矩阵乘法：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -14 \end{bmatrix}$$

其可以视为下列线性方程组对 x_1 的消元过程：

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 2 & & x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 8 & \implies & -x_2 - 4x_3 & = & 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 10 & & -3x_2 - 14x_3 & = & 0 \end{array}$$

我们也可以利用分块的角度来理解上述乘法：

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \ 3 \\ \hline 2 & 1 \ 2 \\ 5 & 2 \ 1 \end{array} \right] &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

事实上，一般来说我们有如果 A 是可逆的 (定义见下一节1.3)，我们有：

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

上述的 $D - CA^{-1}B$ 被称作矩阵 A 的舒尔补 (Schur complement)，其在图像处理、优化等领域有着重要的应用。

1.3 逆矩阵

回顾在之前解方程的过程中存在一组矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

基于它们的乘法运算互为逆过程，如

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad A^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

我们已经通过类似反函数的符号来进行表示这个过程，并称其互为**逆**矩阵。现在我们给出一个精确的定义：

定义 1.4 (可逆矩阵, Invertible Matrix)

称一个 $n \times n$ 的方阵 A 是可逆的，如果存在一个矩阵 B ，使得：

$$AB = BA = I$$

则将 B 称为 A 的逆矩阵，特别的，我们将矩阵 B 记为 A^{-1} ，

例 1.5

对角矩阵:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

当所有对角元 d_i ($i = 1, \dots, n$) 均非零时, D 是可逆的, 其逆矩阵 D^{-1} 也是对角矩阵:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

可以验证:

$$DD^{-1} = D^{-1}D = I$$

若某个 $d_i = 0$, 则 D 的第 i 行全为 0, 任意乘积 DB 的第 i 行也全为 0, 不可能等于单位矩阵。因此, 此时 D 不可逆。

即使我们仅考虑方阵的情况下, 也不是所有的矩阵都有逆矩阵。考察一个 2×2 矩阵 A :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

如果其存在逆矩阵 $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, 则其必须满足:

$$AA^{-1} = I \implies \begin{aligned} ax + bz &= 1 \\ ay + bw &= 0 \\ cx + dz &= 0 \\ cy + dw &= 1 \end{aligned}$$

上述方程仅在 $ad - bc \neq 0$ 时有解, 此时:

$$x = \frac{1}{ad - bc} \cdot d, y = \frac{1}{ad - bc} \cdot (-b), z = \frac{1}{ad - bc} \cdot (-c), w = \frac{1}{ad - bc} \cdot a$$

当 $ad - bc \neq 0$ 时, 可以验证上述候选矩阵满足两侧乘积都等于单位矩阵:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = I, \\ A^{-1}A &= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = I. \end{aligned}$$

从而 A 是可逆的, 当且仅当 $ad - bc \neq 0$, 此时其逆矩阵为:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

逆矩阵的一些性质. 下述引理说明, 如果逆矩阵是存在的, 那么其是唯一的。

引理 1.6

若方阵 A 是可逆的, 那么其逆矩阵是唯一的。

证明: 假设存在两个不同的矩阵 B, C , 使得 $BA = AC = I$, 则:

$$\begin{aligned} B(AC) &= (BA)C = IC = C \\ B(AC) &= BI = B \end{aligned} \implies B = C$$

□

引理 1.7

若 $n \times n$ 的方阵 A, B 都是可逆的, 则矩阵 $C = AB$ 也是可逆的, 且 $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

证明: 显然 $B^{-1}A^{-1}$ 是良定义的, 从而:

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I, \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = I. \end{aligned}$$

从而由引理1.6, C 是可逆的, 并且 $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

□

考虑那些系数构成方阵的线性方程组:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A \qquad \qquad \mathbf{x} \qquad \qquad \mathbf{b} \qquad \qquad A \qquad \qquad \mathbf{x} \qquad \qquad \mathbf{0}$

下列引理说明了 A 是否可逆决定了方程的解是否唯一。

引理 1.8

若方阵 A 是可逆的, 则对于任意的 $\mathbf{b}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解。

证明: 若 $\mathbf{x}$ 是方程的解, 则:

$$A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b} \implies (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \implies \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

另一方面, $A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = \mathbf{b}$, 所以 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ 确实是解。因此方程有唯一解。

□

推论 1.9

令 A 是方阵, 若 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 存在一个非零解, 则 A 不可逆。

证明: 由引理1.8直接可得。 □

本节的最后, 让我们注意到, 由于矩阵的乘法不满足交换律, 因而在定义逆矩阵的时候我们需要满足:

$$AB = BA = I$$

若上述等式只满足 $AB = I$ 或者 $BA = I$, 其是否还是逆矩阵?

问题 1.10

给定两个方阵 A, B , 若 $AB = I$, A 和 B 是否互为逆矩阵?

答案是肯定的, 相关证明将在后续章节中进一步给出。

1.4 转置矩阵和置换矩阵

转置矩阵. 矩阵的行和列扮演了不同的角色, 因此我们定义如下的新矩阵:

定义 1.11 (转置矩阵, Transpose Matrix)

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A , 其转置矩阵 A^T 是一个 $n \times m$ 的矩阵, 其满足:

$$(A^T)(i, j) = A(j, i)$$

考虑如下的矩阵: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 其转置矩阵为:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

可以看到, 转置矩阵可能改变矩阵的形式。

引理 1.12 (转置矩阵的运算法则)

假设下面表达式中的运算都是良定义的。

1. $(A^T)^T = A$
2. $(cA)^T = cA^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

证明：我们只证明最后两个。

- $(AB)^T = B^T A^T$ 的证明.

注意到对任意的 i, j 有:

$$(AB)^T(i, j) = AB(j, i) = \sum_{l=1}^k A(j, l)B(l, i) = \sum_{l=1}^k B^T(i, l)A^T(l, j) = B^T A^T(i, j).$$

这里假定 k 是 A 的列数。

- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ 的证明.

利用上述结论有:

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I,$$

$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I.$$

□

关于 $(AB)^T = B^T A^T$ 的一个简单理解。 注意到:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_x = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_3 + x_2 - x_1 \\ 3x_1 + x_3 - x_2 \end{bmatrix}$$

即: Ax 是对矩阵 A 的列进行的线性组合。另一方面:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}}_{x^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & 2x_3 + x_2 - x_1 & 3x_1 + x_3 - x_2 \end{bmatrix}$$

即: $x^T A^T$ 是对矩阵 A^T 的行进行的线性组合。从而: $(Ax)^T = x^T A^T$ 。

对称矩阵。 考虑如下矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

我们有:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = A$$

我们称这样的矩阵为**对称矩阵**。

定义 1.13 (对称矩阵, Symmetric Matrix)

一个 $n \times n$ 的方阵 S 如果满足其转置矩阵和其相等, 即:

$$S^T = S$$

则称 S 为**对称矩阵**。

例 1.14

一个**无向图** G 由顶点和相连的边组成, 令表示顶点和边的集合分别为 V 和 $E(G = (V, E))$, 其中每条边 $e \in E$ 可以表示为 V 的一个大小为 2 的子集, 如 $\{u, v\}$ 。

为了方便描述, 不妨令顶点集由 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 来表示。则 G 可以由如下的一个 $n \times n$ 的矩阵 $A = A(G)$ 来表示:

$$A(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

我们称 A 是图 G 的**邻接矩阵**, 不难验证 A 是对称的。

下述引理阐述了对称矩阵的一些性质。

引理 1.15

关于对称矩阵, 我们有下列结论:

1. 若 A 是一个可逆的对称矩阵, 则 A^{-1} 也是对称矩阵。
2. 对任意矩阵 A (不需要一定是方阵), AA^T 和 A^TA 都是对称矩阵。

证明: 由引理1.12直接可得。 □

转置矩阵跟内积的关系. 在之前的课程中我们介绍了向量点积的概念, 下述引理说明点积也可以利用转置矩阵来表示:

引理 1.16

1. 令 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 是两个 $n \times 1$ 的矩阵, 即 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量, 则:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

2. 令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, 则:

$$A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A^T \mathbf{y}$$

证明: 由定义直接可得。 □

置换矩阵. 我们直接给出**置换矩阵**的定义。

定义 1.17

置换矩阵 P 是将单位矩阵 I 的行进行重排列得到的矩阵。

所有 3×3 的置换矩阵为：

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & P_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & P_{32}P_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ P_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & P_{32} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & P_{21}P_{32} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

命题 1.18

$n \times n$ 的置换矩阵一共有 $n!$ 个。

证明： 只需注意到 n 个元素不同的排列有 $n!$ 个即可。 □

置换矩阵与解线性方程组. 考察如下的方程组：

$$\begin{aligned} 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= 8 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 10 \end{aligned}$$

第一个方程 x_1 的系数为 0，但后两个方程则不是。为了能够消元，我们需要将后两个方程之一换到最上面，如：

$$\begin{aligned} 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= 8 \\ 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 10 \end{aligned}$$

即从矩阵的角度来说，我们需要：

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

从线性组合的角度来看，我们有：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{21}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

一般来说，对于如下的一个置换矩阵 P_{ij} (交换单位矩阵第 i 行和第 j 行得到的矩阵)，我们有

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{第 } i \text{ 行} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{第 } j \text{ 行} & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{P_{ij}} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

置换矩阵的逆矩阵. 我们先考虑上述提到的置换矩阵 P_{ij} ，其是由单位矩阵仅仅交换第 i 行和第 j 行所得到的，不难发现我们有：

$$\begin{aligned} P_{ij} &= P_{ij}^T \\ P_{ij}^T P_{ij} &= P_{ij} P_{ij}^T = P_{ij} P_{ij} = I \end{aligned}$$

从而：

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij} = P_{ij}^T$$

有趣的是，所有的置换矩阵都是可逆的，而且其逆矩阵恰好都是自己的转置矩阵！

引理 1.19

令 P 是一个置换矩阵，则 P 是可逆的，并且：

$$P^{-1} = P^T$$

证明： 注意到任意的置换矩阵 P ，其都表示成有限个形如置换矩阵 P_{ij} 的乘积，即：

$$P = P_{i_1 j_1} P_{i_2 j_2} \cdots P_{i_k j_k}$$

从而：

$$\begin{aligned} P^T &= (P_{i_1 j_1} P_{i_2 j_2} \cdots P_{i_k j_k})^T = P_{i_k j_k}^T P_{i_{k-1} j_{k-1}}^T \cdots P_{i_1 j_1}^T = P_{i_k j_k} P_{i_{k-1} j_{k-1}} \cdots P_{i_1 j_1} \\ P^{-1} &= (P_{i_1 j_1} P_{i_2 j_2} \cdots P_{i_k j_k})^{-1} = P_{i_k j_k}^{-1} P_{i_{k-1} j_{k-1}}^{-1} \cdots P_{i_1 j_1}^{-1} = P_{i_k j_k} P_{i_{k-1} j_{k-1}} \cdots P_{i_1 j_1} \end{aligned}$$

即：

$$P^{-1} = P^T$$

□