

线性代数 (IV)

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2026 年 9 月 23 日

本节讲义前瞻

在介绍完矩阵的一些运算性质后，让我们再把视角放回几何角度。在介绍矩阵的乘法时候，我们会习惯称呼矩阵左乘是列的线性组合，异或是右乘是行的线性组合，而在课程最开始的时候我们就已经讨论给定的向量，其线性组合究竟张成了什么样的集合？比如，在三维空间中，为什么一定是过原点的直线，过原点的平面或者整个空间？

这个讲义则将回答清楚这个问题，我们会从熟悉的向量加法和数乘出发，认识线性空间、子空间以及由一组向量生成的空间。关键是理解：运算产生的结果是否仍在原来的集合中，以及一组向量究竟能够表示哪些对象。相同的运算规律，也让矩阵和函数可以作为“向量”来研究。

最后，我们把这些概念带回矩阵，认识列空间、零空间等与矩阵相联系的空间，并用列空间回答方程组何时解。这是理解方程组整体解结构的第一步，也为后面讨论解的唯一性及如何描述全部解准备语言。

本节讲义关注的问题

1. 一组向量的所有线性组合所组成的集合从其加法和数乘运算上看具备什么样的性质？
2. 子空间是怎么样一种特殊的线性空间？在三维空间中，为什么一定是过原点的直线，过原点的平面或者整个空间？
3. 矩阵的列空间与零空间分别记录什么？怎样用列空间判断 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 是否有解？

1 线性空间 (向量空间)

我们先介绍一个基本的向量空间 $\mathbb{R}^n$ ：

定义 1.1

空间 $\mathbb{R}^n$ 包含了所有如下的 n 维列向量 $\mathbf{v}$ ：

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

其中对于任意的 $i \in [n]$, $v_i \in \mathbb{R}$ ，这里的 $\mathbb{R}$ 是实数集。

简而言之， $\mathbb{R}^n$ 就是所有每个分量都是实数的 n 维列向量的全体。如果我们允许分量是复数，那么我们可以定义复数域上的向量空间 $\mathbb{C}^n$ ：

定义 1.2

空间 $\mathbb{C}^n$ 包含了所有如下的 n 维列向量 $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

其中对于任意的 $i \in [n]$, $v_i \in \mathbb{C}$, 这里的 $\mathbb{C}$ 是复数集。

例 1.3

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个元素, 通常我们喜欢用 xOy 平面来表示 $\mathbb{R}^2$, 每个向量都表示了一个点 (x, y) 。
2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个元素, 通常我们喜欢用三维空间来表示 $\mathbb{R}^3$, 每个向量都表示了空间中的一个点 (x, y, z) 。
3. $\begin{bmatrix} 1+2i \\ 3-4i \end{bmatrix}$ 则是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个元素。

在 $\mathbb{R}^n$ 我们定义过两种运算:

1. 向量的加法运算:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \text{ 有 } \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

2. 向量的数乘运算:

$$\forall k \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \text{ 有 } k\mathbf{v} = \begin{bmatrix} kv_1 \\ \vdots \\ kv_n \end{bmatrix}$$

这两个运算具备的一个重要特点是, 在运算后的结果仍然是 $\mathbb{R}^n$ 中的元素, 即 $\mathbf{u} + \mathbf{v}, k\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 。这就是我们所说的这两个运算对于 $\mathbb{R}^n$ 是封闭的。除此以外, 向量加法和数乘运算还具备如下的性质:

对向量加法来说:

1. 加法满足交换律:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

2. 加法满足结合律:

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}.$$

3. 加法存在一个零元素（唯一的） $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ，其满足 $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ 对任意的 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ 。
4. 加法存在一个负元素（逆元），即对于任意的 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ ，存在一个 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ，使得 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ，特别的，将 $\mathbf{v}$ 记为 $-\mathbf{u}$ 。

对数乘运算来说：

5. 数乘存在单位元 $1 \in \mathbb{R}$ ，使得 $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ 对于任意的 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ 。
6. 数乘满足结合律：

$$c_1(c_2\mathbf{u}) = (c_1c_2)\mathbf{u}.$$

7. 数乘是线性的，即对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 均有：

$$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}.$$

8. 数乘对于加法满足分配律，即对于任意的 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ 均有：

$$(c_1 + c_2)\mathbf{u} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{u}.$$

我们将上述**向量空间**的概念进行一下扩展，不再局限于 $\mathbb{R}^n$ 和其上的这两种运算上：

定义 1.4（向量空间，或者线性空间）

令 $\mathcal{V}$ 是一个非空集合，定义 $\mathcal{V}$ 上的两种封闭的运算：

1. $\mathcal{V}$ 上的加法运算：

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \text{ 有 } \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

2. $\mathcal{V}$ 在 $\mathbb{R}^a$ 上的数乘运算：

$$\forall k \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \text{ 有 } k\mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

并且这两种运算具备如下的性质：

1. 加法满足交换律：

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

2. 加法满足结合律：

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}.$$

3. 加法存在一个零元素（唯一的） $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$ ，其满足 $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ 对任意的 $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ 。

4. 加法存在一个负元素（逆元），即对于任意的 $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ ，存在一个 $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ，使得 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ，特别的，将 $\mathbf{v}$ 记为 $-\mathbf{u}$ 。

5. 数乘存在单位元 $1 \in \mathbb{R}$ ，使得 $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ 对于任意的 $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ 。

6. 数乘满足结合律：

$$c_1(c_2\mathbf{u}) = (c_1c_2)\mathbf{u}.$$

7. 数乘是线性的, 即对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ 均有:

$$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}.$$

8. 数乘对于加法满足分配律, 即对于任意的 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ 均有:

$$(c_1 + c_2)\mathbf{u} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{u}.$$

则称 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个**向量空间**或者**线性空间**^{b,c}; 特别的, 在讨论 $\mathcal{V}$ 的时候, 其中的元素被称为**向量**, 零元素和负元素被称为**零向量**和**负向量**。

^a这里的数域也可以是复数集 $\mathbb{C}$ 中包含 $0, 1$, 并对加、减、乘及非零数的除法封闭的子集 $\mathbb{F}$, 这样定义的就是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 但本课程关注的主要还是**实数集 $\mathbb{R}$ 上的线性空间**。

^b实际上, 如果数域不同, 也不能算是相同的线性空间。

^c后面, 我们将不加区分的滥用**向量空间**和**线性空间**的称呼。

下面我们再通过一些其他的例子来理解线性空间的概念:

- **只有一个元素的线性空间**: 考察如下的集合 $\mathcal{Z} = \{0\}$, 其只有一个**零元素**, 显然我们可以定义上面的加法和在 $\mathbb{R}$ 上的运算:

1. 加法: $0 + 0 = 0$ 。
2. 数乘: $\forall c \in \mathbb{R}, c0 = 0$ 。

显然 $\mathcal{Z}$ 符合定义1.4中的所有条件, 因此 $\mathcal{Z}$ 是一个线性空间¹。

- **由所有 $m \times n$ 矩阵组成的线性空间**: 对于 $m, n \geq 1$, 令 $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ 表示所有的 $m \times n$ 的实数矩阵的集合:

- o 其中的**加法**就定义成**矩阵的加法**。
- o 其中的**数乘**就定义成**矩阵在 $\mathbb{R}$ 上的数乘**。

注意到:

1. 矩阵的加法满足交换律和结合律。
2. 其零元为全零矩阵 $\mathbf{O}_{m \times n}$, 即所有的入口都是 0。
3. 对于任意的 $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, 其负元 $-M$ 为: $-M = (-1)M$ 。
4. 数乘的单位元就是 $1 \in \mathbb{R}$ 。
5. 数乘满足结合律和分配律。
6. 数乘满足线性性质。

因此 $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

- **无限维向量 (?) 组成的线性空间 $\mathbb{R}^\infty$** : 显然 $\mathbb{R}^n$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 那如果将 $n \rightarrow \infty$, 则 $\mathbb{R}^\infty$ 应该是这样的:

¹ $\mathbb{R}^0$ 可以被认为是 $\mathcal{Z}$ 的一个特殊情况。

1. $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid \text{对所有的 } i, x_i \in \mathbb{R}\}$ 。
2. $c(x_1, x_2, \dots) = (cx_1, cx_2, \dots)$ 。
3. $(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$ 。

实际上我们可以发现, $(x_1, x_2, \dots)$ 实际上定义的是一个 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 上的函数!

定义集合 $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}) = \{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

- 给定 $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, 定义函数 $f_1 + f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 为:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

- 对于任意的 $f \in \mathcal{F}$ 和 $c \in \mathbb{R}$, 定义函数 $cf: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 为:

$$(cf)(x) = cf(x)$$

不难验证, $\mathcal{F}$ 上的加法和数乘满足线性空间的所有条件, 因此 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间。

我们再来考虑如下一个特殊的例子。

例 1.5 (一个特殊的例子)

考虑如下的集合:

$$\mathcal{V} = \mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ and } x > 0\}$$

- 对于任意的 $x, y \in \mathcal{V}$, 定义加法运算 $\oplus$: $x \oplus y$ 为 $x \oplus y = xy$ 。
- 对于任意的 $x \in \mathcal{V}$ 和 $c \in \mathbb{R}$, 定义数乘运算 $\otimes$: $c \otimes x$ 为 $c \otimes x = x^c$ 。

可以验证, $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

线性空间的一些性质: 我们下面介绍线性空间上的一些普遍性质。

引理 1.6

零向量 $\mathbf{0}$ 是唯一的。

证明: 反设存在两个零向量 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$, 则有:

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$$

□

引理 1.7

对于任何向量 $\mathbf{v}$, 其负向量是唯一的。

证明：反设存在两个负向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ，则有：

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v} + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}) + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$$

□

引理 1.8 (向量的消去律 (Cancellation Law))

如果 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ ，则 $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ 。

证明：由：

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = (-\mathbf{u} + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = -\mathbf{u} + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = -\mathbf{u} + (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = (-\mathbf{u} + \mathbf{u}) + \mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{w} = \mathbf{w}$$

□

引理 1.9

1. $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 。
2. $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ 。
3. $-(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (-\mathbf{u}) + (-\mathbf{v})$ 。
4. $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ 。
5. $c(-\mathbf{u}) = (-c)\mathbf{u} = -(c\mathbf{u})$ 。

证明：

1. $0\mathbf{v} = (0 + 0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}$ ，由消去律可得 $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 。
2. $(-1)\mathbf{v} + \mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} + 1\mathbf{v} = (-1 + 1)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ，从而 $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ 。
3. $((-\mathbf{u}) + (-\mathbf{v})) + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (-\mathbf{u} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{v} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ ，从而 $-(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (-\mathbf{u}) + (-\mathbf{v})$ 。
4. $c\mathbf{0} = c(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = c\mathbf{0} + c\mathbf{0}$ ，从而 $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ 。
5. $c\mathbf{u} + (-c)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = c(\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = c\mathbf{u} + c(-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ ，从而 $c(-\mathbf{u}) = (-c)\mathbf{u} = -(c\mathbf{u})$ 。

□

注 1.10

上述引理1.9阐述的一个重要的点是，一个向量 $\mathbf{u}$ 的负向量 $-\mathbf{u}$ 实际上就是 $(-1)\mathbf{u}$ ，因此在后续的过程中 $-\mathbf{u}$ 和 $(-1)\mathbf{u}$ 可以互相替换。

2 子空间

我们来考察 $\mathbb{R}^2$ 上的两个子集:

1. $\mathcal{L}_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 。
2. $\mathcal{L}_2 = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 。

显然 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ 都是 $\mathbb{R}^2$ 的子集, 但是对于定义的两组运算上:

- $\mathcal{L}_1$ 对于加法和数乘运算是封闭的。
- $\mathcal{L}_2$ 对于加法和数乘运算不是封闭的。

更进一步可以发现, $\mathcal{L}_1$ 上的加法和数乘运算满足线性空间的所有性质, 从而 $\mathcal{L}_1$ 也是 $\mathbb{R}$ 上的**线性空间**。这给了我们一种构造线性空间的方法, 即寻找线性空间的子集, 使得这个子集对于线性空间的运算是封闭的, 这样的子集被称为**子空间**。下面我们给出正式的定义:

定义 2.1 (子空间 (Subspace))

给定一个向量空间 $\mathcal{V}$, 如果 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个**非空子集**, 并且 $\mathcal{W}$ 满足如下两个条件:

1. 对于任意的 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{W}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{W}$ 。
2. 对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u} \in \mathcal{W}$, $c\mathbf{u} \in \mathcal{W}$ 。

则称 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个**子空间**。

下面定理告诉我们, 子空间也是一个线性空间:

定理 2.2

如果 $\mathcal{W}$ 是线性空间 $\mathcal{V}$ 的一个子空间, 则 $\mathcal{W}$ 对于 $\mathcal{V}$ 上定义的加法和数乘运算构成一个线性空间。

证明: 由子空间的定义, $\mathcal{W}$ 非空, 且对加法和数乘封闭。取 $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, 则 $\mathbf{0} = 0\mathbf{w} \in \mathcal{W}$; 对于任意的 $\mathbf{u} \in \mathcal{W}$, 有 $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u} \in \mathcal{W}$ 。其余运算规律直接继承自 $\mathcal{V}$, 因此 $\mathcal{W}$ 满足线性空间的所有条件。 $\square$

我们同样给出一些子空间的例子:

- 考察如下集合:

$$\mathcal{W} = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

则子集 $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个子空间, 原因在于:

- 对于任意的 $\mathbf{u} = (x_1, y_1, 0), \mathbf{v} = (x_2, y_2, 0) \in \mathcal{W}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in \mathcal{W}$ 。
- 对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{u} = (x, y, 0) \in \mathcal{W}$, $c\mathbf{u} = (cx, cy, 0) \in \mathcal{W}$ 。

并且不难验证, $\mathcal{W}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间。

- 考察如下由所有的 $n \times n$ 矩阵中的对角矩阵组成的集合:

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) := \{\text{diag}(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

则 $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ 的一个子空间, 同样其也是一个 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

子空间的一些性质: 我们下面介绍子空间上的一些普遍性质。

引理 2.3

如果 $\mathcal{W}$ 是线性空间 $\mathcal{V}$ 的一个子空间, 则 $\mathbf{0} \in \mathcal{W}$.

证明: 取 $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, $0\mathbf{w} = \mathbf{0} \in \mathcal{W}$. □

引理 2.4

令 $\mathcal{W}$ 是线性空间 $\mathcal{V}$ 的一个子空间, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{W}$, 则所有 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 的线性组合 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ 均在 $\mathcal{W}$ 中。

证明: 由子空间的定义, 对于任意的 $c, d \in \mathbb{R}$, 均有:

$$c\mathbf{u}, d\mathbf{v} \in \mathcal{W}$$

从而:

$$c\mathbf{u} + d\mathbf{v} \in \mathcal{W}$$

□

引理 2.5

令 $\mathcal{V}$ 是一个线性空间, $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个子集。则 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个子空间当且仅当: 对于任意的 $k \geq 0$, $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{W}$ 均有:

$$c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k \in \mathcal{W}$$

特别的, 当 $k = 0$ 时我们令上述和为 $\mathbf{0}$.

证明: 充分性是显然的, 直接可由定义得到; 必要性可通过引理2.4进行归纳得到。 □

2.1 如何生成一个子空间？

注 2.6

在后续的讨论中，我们会省略掉“在 $\mathbb{R}$ 上的线性空间”，而简单的称为是“线性空间”或者“向量空间”。这是因为在本课程的学习中，我们暂时不会涉及到其他数域上的线性空间；同时，当前后文没有歧义的时候，也会经常这么直接表示。

由前面的讨论可以知道，给定一个线性空间 V 和其上的一个非空子集 $S \subseteq V$ ， S 不一定是一个子空间，当然也不是一个线性空间。所以我们会产生如下的一个问题：

问题

如何从一个线性空间 V 的一个非空子集 S 生成一个包含 S 的子空间？

事实上，这个问题的答案非常简单，我们只需要包含 S 中的元素的所有线性组合即可。我们定义如下的操作 $\text{span}(\cdot)$ ：

$$\text{span}(S) := \{c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \mid k \geq 0, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in S\}$$

由于运算的封闭性，显然 $\text{span}(S)$ 是 V 的一个子集。下面的定理进一步说明了， $\text{span}(S)$ 还是一个 V 中包含 S 的一个最小子空间：

定理 2.7

令 $S \subseteq V$ ，则 $\text{span}(S)$ 是 V 的包含 S 的最小子空间，即：

1. $\text{span}(S)$ 是 V 的子空间。
2. $S \subseteq \text{span}(S)$ 。
3. 令 $W \subseteq V$ 是一个 V 的子空间，且 $S \subseteq W$ ，则 $\text{span}(S) \subseteq W$ 。

证明：由引理2.5可知， $\text{span}(S)$ 是 V 的子空间；对于第二点，只需要注意到 W 也是个线性空间，其对加法和数乘运算是封闭的，从而 $\text{span}(S) \subseteq W$ 。 $\square$

例 2.8

考察 $\mathbb{R}^3$ 上的如下集合：

1. $S_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ 。
2. $S_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ 。
3. $S_3 = \{(x, y, z) \mid x \leq y, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ 。

则我们有：

1. $\text{span}(S_1) = \{\lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ 。

$$2. \text{span}(\mathcal{S}_2) = \{\lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0) + \eta(0, 0, 1) \mid \lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3.$$

3. 注意到:

$$(0, 1, 0), (0, 0, 1) \in \mathcal{S}_3$$

$$1(1, 2, 0) + (-1)(0, 2, 0) = (1, 0, 0) \in \text{span}(\mathcal{S}_3)$$

从而 $\text{span}(\mathcal{S}_3) = \text{span}(\mathcal{S}_2) = \mathbb{R}^3$ 。

并且可以很轻松的验证对所有的 i , $\mathbb{R}^3$ 包含 $\mathcal{S}_i$ 的最小子空间为 $\text{span}(\mathcal{S}_i)$ 。

矩阵 A 上的线性空间: 下面这部分没有出现在课本上, 但这部分内容会对我们理解矩阵与求解方程组起到非常重要的作用, 因此请各位同学一定要记住这部分内容。给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A, 我们可以写成如下的形式:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

其中每个 $\mathbf{a}_i$ 是一个 $m \times 1$ 的列向量, 我们称其为矩阵 A 的列向量, 进而可以定义如下的集合:

1. A 的列空间 $\mathcal{C}(A)$:

$$\mathcal{C}(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

即 $\mathcal{C}(A)$ 是所有由A 的列向量的线性组合而成的集合。

2. A 的零空间 $\mathcal{N}(A)$:

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

即 $\mathcal{N}(A)$ 是所有使得 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的 $\mathbf{x}$ 的集合。

3. A 的行空间 $\mathcal{C}(A^T)$: 我们用 A^T 的列空间来定义 A 的行空间²。

4. A 的左零空间 $\mathcal{N}(A^T)$: 我们用 A^T 的零空间来定义 A 的左零空间。

例 2.9

给定如下的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{和其转置矩阵} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

则:

1. 其列空间 $\mathcal{C}(A)$ 为:

$$\mathcal{C}(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\} = \text{span} \left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\} \right) = \text{span} \left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

²这样定义的方法保证了尽管想从行向量去进行考虑, 但形式上依旧是列向量。

2. 其零空间 $\mathcal{N}(A)$ 为:

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \text{span} \left(\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

3. 其行空间 $\mathcal{C}(A^T)$ 为:

$$\mathcal{C}(A^T) = \{A^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\} = \text{span} \left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\} \right) = \text{span} \left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

4. 其左零空间 $\mathcal{N}(A^T)$ 为:

$$\mathcal{N}(A^T) = \{\mathbf{x} \mid A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \text{span} \left(\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

不难验证, $\mathcal{C}(A^T), \mathcal{N}(A)$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $\mathcal{C}(A), \mathcal{N}(A^T)$ 都是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间:

定理 2.10

令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵, 则:

1. $\mathcal{C}(A)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。
2. $\mathcal{N}(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。
3. $\mathcal{C}(A^T)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。
4. $\mathcal{N}(A^T)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。

这四个空间与方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解有着密切的联系, 在本节的最后我们仅仅展示一个例子:

定理 2.11

令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, 则:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ 有解当且仅当 } \mathbf{b} \in \mathcal{C}(A).$$

证明: 令矩阵 A 的列向量为 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, 则:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ 有解} &\Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \mathbf{b} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n. \\ &\Leftrightarrow \mathbf{b} \in \text{span}(\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{b} \in \mathcal{C}(A) \end{aligned}$$

□