

符号说明

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2026 年 9 月 14 日

本文主要列举了一些课程中常用的符号，以及一些常用的与本课程不同的记号。但在具体语境中，以具体语境中的叙述为准。

1. 集合 (Set)

这里列举一些常用的集合记号：

- 有限自然数集： $[n]$ 表示所有不超过 n 的正整数集合，如 $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。
- 自然数集： $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 。
- 整数集： $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ 。
- 有理数集： $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ 。
- 实数集： $\mathbb{R}$ 。
- 复数集： $\mathbb{C}$ 。
- 空集： $\emptyset$ 。

2. 标量 (Scalars)

一般使用小写字母或者小写希腊字母表示，如 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ 等，本课程在绝大部分时刻考虑的是实数域 $\mathbb{R}$ ，但是在一些特殊情况下，也会考虑复数域 $\mathbb{C}$ 。

3. 向量 (Vectors)

一般使用小写加粗字母或者小写加粗希腊字母表示，如 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ 等。特别需要注意的是，在不加额外说明的情况下，我们指的是列向量。即我们使用：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{或者} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

来表示一个 n 维向量。但由于篇幅原因，我们做一个特殊的约定，在没有特别注明的情况下：

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

也表示成一个 n 维列向量，这个方法是为了节省空间。

一些特殊的向量：

- 零向量： $\mathbf{0}$ 表示全零向量。
- 全一向量： $\mathbf{1}$ 表示全一向量。

- **标准单位向量**：在维数确定的时候， $\mathbf{e}_i$ 表示第 i 个标准单位向量，即第 i 个分量为 1，其余分量为 0。

向量的点积 (内积)：请注意，尽管我们既会考虑列向量也会考虑行向量，但内积是针对同一个空间上的向量而言的，即对于一个行向量和一个列向量，是没有内积的 (可以认为一个是 $\mathbb{R}^{1 \times n}$ ，一个是 $\mathbb{R}^{n \times 1}$)。而课程中两个向量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的内积我们表示为 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ，很多书上也会用 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ 来表示，后者的好处是在考虑复数的时候其一些共轭性质 (在实数时不需要考虑，因为实数的共轭就是其本身) 更为直观。

与矩阵乘法的区别：两个向量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的内积 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ 也可以表示为 $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ ，但请注意两者之间的区别：

- (1) 前者定义的是**两个向量之间的内积**，后者则是一个**矩阵上的乘法**，只是两者恰好算出来是一致的。
- (2) 如果 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 是行向量的话，结果就应该是 $\mathbf{x} \mathbf{y}^T$ 。

4. 矩阵 (Matrices)

一般使用**大写字母**或者**大写希腊字母**表示，如 A, B, C, Λ 等，有时也会在下标标明矩阵的大小，如 $A_{m \times n}$ 表示一个 $m \times n$ 的矩阵。一个 $n \times n$ 的矩阵也被称作**方阵**或者 **n 阶矩阵**。对于一个矩阵 A ，常用 $A(i, j), A_{ij}, A[i][j]$ 来表示其**第 i 行第 j 列的元素**。第 i 行第 j 列的元素为 a_{ij} 的 $m \times n$ 矩阵也会被记作 $(a_{ij})_{m \times n}$ 。

在课本和教材中，我们会用如下的方式表示矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

这个括号根据个人的喜好，但请注意下面的符号表达的是行列式，而绝非是一个矩阵：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

对于一个 $m \times n$ 的矩阵 A 来说，我们可以将其任意分块表示：

- (1) 我们可以将其每一行看成一个**行向量** $\mathbf{a}_i$ ，从而矩阵可以表示为：

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}.$$

- (2) 我们可以将其每一列看成一个**列向量** $\mathbf{a}_i$ ，从而矩阵可以表示为：

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

(3) 我们可以将其分成若干的小矩阵，如：

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,q} \end{bmatrix}.$$

这里每个 $A_{i,j}$ 都是一个 $m_i \times n_j$ 的矩阵，满足：

- (i) $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = m$ 。
- (ii) $n_1 + n_2 + \cdots + n_q = n$ 。

常用的矩阵记号：

- 全零矩阵 O ：所有元素都为 0 的矩阵。
- 单位矩阵 I ：对角线上的元素都为 1，其余元素都为 0 的方阵；国内很多书上会用 E 表示，但在本课程中我们会用 I 。
- 对角矩阵 $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ ：对角线上的元素为 $a_1, \dots, a_n$ ，其余元素为 0 的矩阵。
- 置换矩阵：将单位矩阵的行进行任意置换得到的矩阵。
- 初等矩阵：对单位矩阵进行一次初等行变换得到的矩阵，有以下三类：

(1) 将第 i 行乘以一个非零常数 k 得到的矩阵 $E(i(k))$ ：

$$\text{第 } i \text{ 行} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 将第 i 行加上第 j 行的 k 倍 ($i \neq j$) 得到的矩阵 $E(ij(k))$ ，也会用 $E_{ij}(k)$ 表示，特别的我们会省略 k 来表示这一类矩阵：

$$\begin{matrix} \text{第 } i \text{ 行} \rightarrow \\ \text{第 } j \text{ 行} \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 交换第 i 行和第 j 行 ($i \neq j$) 得到的矩阵 $E(i, j)$, 注意到这是一种特殊的**置换矩阵**, 我们也常用 P_{ij} 表示:

$$\begin{array}{l} \text{第 } i \text{ 行} \rightarrow \\ \text{第 } j \text{ 行} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

常用的矩阵术语:

- **矩阵的转置:** A^T 表示矩阵 A 的转置。
- **矩阵的逆:** A^{-1} 表示矩阵 A 的逆, **如果存在的话**。
- **矩阵的行列式:** $\det(A)$, $|A|$ 表示**方阵** A 的行列式。请注意: **行列式和矩阵是完全不同的概念**。
- **矩阵的秩:** $\text{rank}(A)$ 表示矩阵的秩, 相关的概念还有column-rank(列秩) 和 row-rank(行秩)。注意在很多书当中, 这三个概念会混在一起 (由于相等), 并且用 $\mathbf{R}(A)$ 来表示矩阵的秩, 但在本课程中我们会先区别表示, 并最终证明它们是相等的。