发布日期：2023 年 9 月 28 日　　　　截止日期：2023 年 10 月 20 日

计算复杂性理论 — 第一次作业

姓名：XXX　　　　学号：YYYYYYYYYYYY

问题 1　设计一个计算两个自然数相乘的图灵机。

解答　TODO　□

问题 2　在第 7 页，定义了何谓一台图灵机 $\mathbb{M}$ 解决一个问题 $f:\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$。证明绝大部分问题是不可计算的。

解答　TODO　□

问题 3　设计一台将一进制数 1^n 转换成二进制数 $\llcorner n \lrcorner$ 的图灵机。你设计的图灵机的时间函数是什么？将二进制数转换成一进制数呢？

解答　TODO　□

问题 4　函数 $\log^*(x)$ 定义如下：

$$\begin{aligned}\log^*(1) &= 0, \\ \log^*(x) &= 1+\log^*(\log(x)), \quad 若 x>1。\end{aligned}$$

设计计算 $\log^*(x)$ 的图灵机。你设计的图灵机的时间复杂性是多少？

解答　TODO　□

问题 5　证明符号集为 $\{0,1,\Box,\rhd\}$ 的多带图灵机可以模拟如下类型的图灵机，并且模拟过程中使用的额外计算是多项式时间的：

1. 带子是双向无限的，符号集可以任意大小。证明模拟可以在线性时间内完成。
2. 将带子换成三维坐标定义的第一象限体，符号存放在整数坐标点上。
3. 证明具有一条读写带的图灵机可以模拟 k 带图灵机。

解答　TODO　□

问题 6　有一台“厉害的”双带图灵机，该机有三个特殊的状态 $q_?, q_=, q_{\neq}$。当机器处于状态 $q_?$ 时，进行如下计算：若两个读写头处于同一位置（比如都处于所在带子的第 7 格），机器进入状态 $q_=$，若两个读写头处于不同位置，机器进入状态 $q_{\neq}$。设计一台多带图灵机模拟这台“厉害的”的图灵机的计算。

解答　TODO　□

问题 7 设 $T(n), T'(n)$ 为时间可构造。证明 $T(n)+T'(n)$、$T(n)\cdot T'(n)$、$T(n)^{T'(n)}$ 均为时间可构造。能证明 $T(n)/T'(n)$ 是时间可构造吗？$\log T(n)$ 呢？

解答 TODO □

问题 8 考虑第 **12** 页的定理 **1.2:** 存在通用图灵机 $\mathbb{U}$ 和多项式 c，使得对任意长度为 n 的输入串 x，若 $\mathbb{M}_\alpha(x)$ 在 $T(n)$ 步内停机，则 $\mathbb{U}(\alpha, x)$ 在 $c(|\alpha|)T(n)\log T(n)$ 步内停机。

如果在定理 1.2 的证明中，我们让 $|R_i| = 2\cdot 2^{i^2}$。证明在哪一步会出问题？如果没有问题的话，我们会得到一个更高效的通用图灵机！

解答 TODO □

问题 9 证明第 **21** 页的引理 **1.1:** $\{(\phi)_i, time_i\}_{i\in\omega}$ 是布鲁姆复杂性度量。

解答 TODO □

问题 10 证明第 **24** 页的推论 **1.3:** 设 $T(n) = \omega(n)$，设图灵机 $\mathbb{M}$ 在 $T(n)$ 步内判定 L。对任意 $\epsilon > 0$，存在图灵机 $\mathbb{M}'$，$\mathbb{M}'$ 能在 $\epsilon T(n)$ 步内判定 L。

解答 TODO □

问题 11 利用分配律 $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ 和 $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$，是否可在多项式时间内将合（析）取范式转换成析（合）取范式？

解答 TODO □

问题 12 用对角线方法定义一个可计算全函数，该函数与任何一个原始递归函数不相等。

解答 TODO □

问题 13 说明：若忽略不终止性，在第 28 页上定义的非确定的“通用”图灵机是正确的。

解答 TODO □

问题 14 证明第 **44** 页的命题 **3:** 若 $A \leq_K B \leq_K C$，则 $A \leq_K C$。若若 $A \leq_C B \leq_C C$，则 $A \leq_C C$。

解答 TODO □

问题 15 证明 $\mathbf{EXP}^{\mathbf{EXP}} = 2\text{-}\mathbf{EXP}$。

解答 TODO □

问题 16 证明 $2\mathtt{SAT} \in \mathbf{P}$。

解答 TODO □

问题 17　写一段对数空间程序，解决在第 **46** 页 (1.16.1) 中定义的问题 MULP:

$$\texttt{MULP} = \{(a, b, c) \mid a, b, c \text{ 为二进制数，且 } a \cdot b = c\}.$$

解答　TODO □

问题 18　证明第 **46** 页的定理 **1.11(**空间压缩定理**):** 设图灵机 $\mathbb{M}$ 在 $S(n)$ 空间判定 L。对任意 $\epsilon > 0$，存在图灵机 $\mathbb{M}'$，$\mathbb{M}'$ 能在 $\epsilon S(n) + 1$ 空间内判定 L。

解答　TODO □

问题 19　证明第 **51** 页的引理 **1.8:** 隐式对数空间可计算函数就是对数空间可计算函数。

解答　TODO □

问题 20　考虑第 **52** 页的引理 **1.9:** QBF 可在线性空间判定。将引理 1.9 的证明中描述的线性空间算法用程序实现。

解答　TODO □

问题 21　考虑第 **53** 页的定理 **1.15(**斯托克迈尔-梅耶定理**):** QBF 是 **PSPACE-**完全的。说明定理 1.15 的证明中构造的 φ_x 是对数空间可计算的。

解答　TODO □

问题 22　用程序实现萨维奇定理证明中的算法。

解答　TODO □

问题 23　证明 $\mathbf{PSPACE}^{\mathbf{PSPACE}} = \mathbf{PSPACE}$。

解答　TODO □

问题 24　间隙定理（1.10）的证明用了很一般的方法，其中的 $b(n)$ 函数可以理解为其它的资源函数。说明用其它资源函数定义的复杂性类也应该有间隙定理。给出空间间隙定理的叙述和证明。

解答　TODO □

问题 25　考虑第 **61** 页的引理 **1.10:** $P_d(n) = O(n/\log(n))$。将引理 1.10 的证明细节补上。

解答　TODO □

问题 26　考虑第 **59** 页的定理 **1.18(**时空定理**):** $\mathbf{TIME}(S(n)) \subseteq \mathbf{SPACE}(S(n)/\log(S(n)))$。证明：即便 $S(n)$ 不是空间可构造的，定理 1.18 依然成立。

解答 TODO □