发布日期：2023 年 10 月 30 日　　截止日期：2023 年 11 月 15 日

计算复杂性理论 — 第二次作业

姓名： XXX　　学号： nnnnnnnnnnn

说明：以下引用的页码、定理序号等均以纸质版教材为准。

问题 1　证明：假定 $\mathbf{NP} \neq \mathbf{P}$，不存在保持可满足性的多项式时间算法将合取范式转换成析取范式。

解答　TODO　□

问题 2　证明：若 $A, B \in \mathbf{NP}$，则 $A \cup B, A \cap B, AB \in \mathbf{NP}$。[1]

解答　TODO　□

问题 3　设 $A \in \mathbf{NPC}$ 和 $B \in \mathbf{P}$。证明：若 $A \cap B = \emptyset$，则 $A \cup B \in \mathbf{NPC}$。[2]

解答　TODO　□

问题 4　证明：$\texttt{SAT} \leq_K \texttt{IP}$。

解答　TODO　□

问题 5　证明 $\left\{\psi 01^{|\psi|^c} \mid \psi \in \texttt{SAT}\right\} \in \mathbf{NPC}$，并且 $\left\{\psi 01^{2^{|\psi|}} \mid \psi \in \texttt{SAT}\right\} \in \mathbf{P}$。

解答　TODO　□

问题 6　在定理 2.3 的证明[3]中，我们假定 TMNP 的验证器 $\mathbb{M}$ 是健忘的。如果不做此假定，我们应该如何构造从 TMNP 到 SAT 的归约？

解答　TODO　□

问题 7　设 TMEXP 为语言 $\{\langle \alpha, x, 1^n \rangle \mid \mathbb{M}_\alpha(x)\text{在}2^n\text{步内输出}1\}$。证明 TMEXP 是 **EXP**-完全的。这种构造时间复杂性类完全问题的一般方法是否适用于空间复杂性类，比如 **PSPACE**？

解答　TODO　□

问题 8　在命题 4 的证明中，我们用到了 SAT 的稠密性。证明此性质。

解答　TODO　□

[1] 其中 $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ 包含所有 A 中的串与 B 中的串的复合。
[2] 该题目有漏洞，需要加一个条件：$A \cup B \neq \{0,1\}^*$，即 B 不是 A 的补集。
[3] 即 Cook-Levin 定理。

问题 9 指出下面“证明”的错误：假定 $\mathbf{NP}=\mathbf{P}$，那么 $\mathbf{NP}^O=\mathbf{P}^O$ 对任意神谕 O 成立。根据定理 2.6，存在神谕 B 使得 $\mathbf{NP}^B\neq\mathbf{P}^B$。矛盾。因此 $\mathbf{NP}\neq\mathbf{P}$。

解答 TODO □

问题 10 设 f 是可计算函数，g 是处处有定义的可计算函数。定义神谕是函数 g 的类型 $\mathbf{P}^g$，并定义 $f\leq_C g$。

解答 TODO □

问题 11 在库克归约的定义中，子程序调用是适应性的，即神谕图灵问的第 $i+1$ 个问题可能依赖于神谕前面问过的 i 个问题的答案。定义非适应性库克归约 $\leq_C^{na}$。

解答 TODO □

问题 12 在量化布尔公式的定义中，见第 33 页 (1.10.3) [4]，要求 $\varphi(x^1,\ldots,x^n)$ 是合取范式。证明：

1. 若要求 $\varphi(x^1,\ldots,x^n)$ 是析取范式，QBF 依然是 PSPACE-完全的；
2. 若只要求 $\varphi(x^1,\ldots,x^n)$ 不含量词，QBF 依然是 PSPACE-完全的。

解答 TODO □

问题 13 证明：$\Sigma_i^p=\Sigma_{i+1}^p$ 蕴含 $\Sigma_i^p=\mathbf{PH}$。

解答 TODO □

问题 14 定义一个神谕 A，使得 $\mathbf{PH}^A=\mathbf{P}^A$ 成立。

解答 TODO □

问题 15 说明在定理 2.10 的证明 [5] 中，哪些地方需用到时间/空间可构造性？

解答 TODO □

问题 16 证明：若 $A,B\in\Sigma_i^p$，必有 $A\cup B,A\cap B\in\Sigma_i^p$。

解答 TODO □

问题 17 在定义多项式谱系时，用的是卡普归约。如果用库克归约，会有何不同？

解答 TODO □

[4]公式 (1.10.3) 为 $Q_1x^1Q_2x^2\cdots Q_nx^n.\varphi(x^1,\cdots,x^n)$。

[5]即钱德拉-科赞-斯托克迈尔定理

问题 18　证明第 80 页上定义的 `TERMWISE-MIN-DNF` [6] 是 Σ_2^p-完全的。

解答　TODO □

问题 19　将 `MIN-DNF` 的定义中的析取范式换成合取范式，得到 `MIN-CNF`。证明 `MIN-CNF` 是 Σ_2^p-完全的。

解答　TODO □

问题 20　问题 $\texttt{Short-IMP}^{\mathrm{DNF}}$ 的更一般形式是：

$$\texttt{Short-IMP} \quad = \quad \{\langle\phi, k\rangle \mid \phi\text{有一个大小不超过 } k \text{ 的蕴含项}\}\text{。}$$

定义从 2QBF 到 `Short-IML` 的映射如下：

$$\exists x_1 \ldots x_m.\forall y.\phi \quad \mapsto \quad \phi \wedge \bigwedge_{i\in[m]} (x_i \wedge \overline{w_i} \vee \overline{x_i} \wedge w_i)\text{。}$$

上述公式中，$w_1, \ldots, w_m$ 为新变量。证明此映射为卡普归约，从而推出 `Short-IMP` 是 Σ_2^p-完全的。

解答　TODO □

[6] `TERMWISE-MIN-DNF`：给定析取范式 $\varphi = \bigvee_{i\in[m]} \varphi_i$ 和自然数 k，是否存在大小不超过 k 的析取范式 $\varphi' = \bigvee_{i\in[m]} \varphi'_i$ 使得 $\varphi \iff \varphi'$ 为永真式，并且对任意 $i \in [m]$，φ'_i 中的字都出现在 φ_i 中。